Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Rajono (miesto) etapo užduočių 11 - 12 klasei sprendimai
2015 m.

1 uždavinys. Aistė užrašė skaičių seką:

$$1 \cdot (2-3)^4, \quad 4 \cdot (5-6)^7, \quad 7 \cdot (8-9)^{10}, \quad \ldots, \quad 2014 \cdot (2015-2016)^{2017}.$$

a) Kiek narių sudaro Aistės seką?
b) Kam lygi visų sekos narių suma?
c) Koks yra paskutinis visų sekos narių kvadratų sumos skaitmuo?

Sprendimas. a) Skaičiai 1, 4, ..., 2014 sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas yra $d = 3$. Jei Aistės seką sudaro n narių, tai turi galioti lygybė $2014 = = 1 + d(n-1) = 3n-2$ (prie skaičiaus 1 pridedame $d = 3$ iš viso $n-1$ kartą). Randame $n = (2014+2)/3 = 672$.
b) Skaičiai $2-3, 5-6, \ldots$ visi lygūs -1. Laipsnio rodikliai 4, 7, ..., 2017 vėlgi sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas yra $d = 3$. Gretimi skaičiai joje skiriasi per 3, todėl jei vienas iš jų lyginis, tai kitas nelyginis (ir atvirkščiai). Taigi skaičius -1 keliamas tai lyginiu, tai nelyginiu laipsniu, ir Aistės seką sudaro skaičiai $1, -4, 7, -10, 13, -16, \ldots, 2011, -2014$. Sudėkime juos:

$$s = 1 + (-4) + 7 + (-10) + 13 + (-16) + \ldots + 2011 + (-2014) =$$

$$= (1-4) + (7-10) + (13-16) + \ldots + (2011-2014) = -3-3-3-\ldots-3.$$

Visi skirtumai yra skirtumai tarp gretimų progresijos 1, 4, ..., 2014 narių, todėl lygūs -3. Belieka išsiaiškinti, kiek tokių skirtumų yra. Jei iš viso narių yra 672, tai skaičių -3 gavome tiek kartų, kiek sudarėme skaičių porų, t. y. $672 : 2 = 336$ kartus. Taigi $s = 336 \cdot (-3) = -1008$.
c) Kai skaičius $1, -4, 7, -10, 13, -16, \ldots, 2011, -2014$ kelsime kvadratu ir sudėsime, gausime sumą $1^2 + 4^2 + 7^2 + 10^2 + \ldots + 2014^2$. Jos paskutinis skaitmuo priklauso tik nuo skaičių $1^2, 4^2, 7^2, 10^2, \ldots, 2014^2$ paskutinių skaitmenų, o šie savo ruožtu priklauso tik nuo skaičių $1, 4, 7, 10, \ldots, 2014$ paskutinių skaitmenų. Jei iš eilės užrašysime bent kiek daugiau pastarosios sekos narių, pastebėsime, kad paskutinis skaitmuo kas dešimt narių kartojasi. Taip yra todėl, kad skirtumas tarp k-ojo ir $(k+10)$-ojo narių visada bus $3 \cdot 10 = 30$ (10 kartų pridėję 3 prie vieno nario gausime kitą). Jų skirtumas baigiasi nuliu, todėl patys nariai baigiasi tuo pačiu skaitmeniu.

Vadinasi, ir sekoje $1^2, 4^2, 7^2, 10^2, \ldots, 2014^2$ paskutinis skaitmuo kartojasi kas 10 narių. Iš eilės užrašykime, kokie yra tie paskutiniai skaitmenys: $1, 6, 9, 0, 9, 6, 1, 4, 5, 4, \ldots$ Toliau skaitmenys pradeda kartotis (t. y. vėl turime 1, 6 ir t. t.). Visus $672 = 67 \cdot 10 + 2$

skaičius galime suskirstyti į 67 grupes po 10 skaičių ir dar lieka du skaičiai 2011^2 bei 2014^2. Kiekvienos grupės skaičių suma baigiasi tuo pačiu skaitmeniu, kaip ir suma $1+6+9+0+9+6+1+4+5+4$, t. y. skaitmeniu 5. Skaitmenį 5 gauname 67 kartus. Be to, dar turime du skaičius 2011^2 ir 2014^2, kurių paskutiniai skaitmenys yra 1 ir 6. Taigi belieka sužinoti paskutinį skaičiaus $67 \cdot 5 + 1 + 6$ skaitmenį. Gauname skaitmenį 2.

Ats.: a) 672; b) -1008; c) 2.

2 uždavinys. Tolimos salos gyventojai pamiršo, ką reiškia realiųjų skaičių sudėtis ir daugyba. Tačiau jų didžiausias išminčius apibrėžė naują aritmetinį veiksmą. Vietoj ženklų $+$ ar $\times$ jis ėmė naudoti ženklą $\diamond$. Pvz., anot jo,

$$2 \diamond 2 = 3.$$

Atvykęs salon matematikas pastebėjo, kad bet kokiems teigiamiems skaičiams x ir y galioja lygybės

$$(2x) \diamond y = 1 + x \diamond y$$

ir

$$x^2 \diamond y = y^2 \diamond x,$$

nors lygybė $x \diamond y = y \diamond x$ galioja ne visada.
a) Raskite $32 \diamond 8$.
b) Naudodamiesi vien turima informacija, raskite tokį teigiamą skaičių u, kad

$$128 \diamond u = 0.$$

Sprendimas. Pirmoji lygybė sieja $(2x) \diamond y$ su $x \diamond y$, taigi leidžia žinant vieną reiškmę rasti kitą dvigubinant (ar dalijant pusiau) x. Galima ir $x \diamond (2y)$ susieti su $x \diamond y$:

$$x \diamond (2y) = (2y)^2 \diamond \sqrt{x} = (4y^2) \diamond \sqrt{x} = 1 + (2y^2) \diamond \sqrt{x} = 2 + y^2 \diamond \sqrt{x} = 2 + x \diamond y.$$

Lygybė $x \diamond (2y) = 2 + x \diamond y$ galioja bet kokiems teigiamiems x ir y.
a) Dabar galime susieti $32 \diamond 8$ su $2 \diamond 2$:

$$32 \diamond 8 = 1 + 16 \diamond 8 = 2 + 8 \diamond 8 = 3 + 4 \diamond 8 = 4 + 2 \diamond 8 = 6 + 2 \diamond 4 = 8 + 2 \diamond 2 =$$

$$= 8 + 3 = 11.$$

b) Žinomą skaičių ir nežinomąjį sukeiskime vietomis. Duotoji lygybė ekvivalenti lygybei $1 + 64 \diamond u = 0$, o pastaroji ekvivalenti lygybei $1 + u^2 \diamond 8 = 0$ arba $u^2 \diamond 8 = -1$. Vėlgi bandykime susieti šią lygybę su žinoma reikšme $2 \diamond 2$:

$$2 \diamond 8 = 2 + 2 \diamond 4 = 4 + 2 \diamond 2 = 7.$$

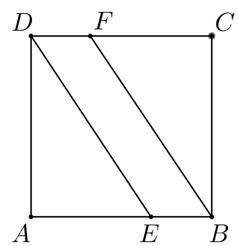
Tada $1 \diamond 8 = 2 \diamond 8 - 1 = 6$, $2^{-1} \diamond 8 = 1 \diamond 8 - 1 = 5$, $2^{-2} \diamond 8 = 2^{-1} \diamond 8 - 1 = 4$, $\ldots$, $2^{-7} \diamond 8 = -1$. Taigi galime imti $u^2 = 2^{-7}$ ir $u = 2^{-7/2}$.

Pastaba. Operacija $\diamond$ egzistuoja. Bet kokiems teigiamiems x ir y ją įmanoma apibrėžti, pavyzdžiui, taip: $x \diamond y = \log_2(xy^2)$. Operacija nėra vienareikšmiškai apibrėžta duotų lygybių.

Ats.: a) 11; b) $u = 2^{-7/2}$.

3 uždavinys. Kvadrato $ABCD$ kraštinėje AB pažymėtas taškas E, o kraštinėje CD pažymėtas taškas F. Tiesės DE ir BF lygiagrečios ir atstumas tarp jų lygus 1. Šios tiesės dalija kvadratą į tris lygiaplotes dalis. Raskite kvadrato plotą.

Sprendimas. Kvadrato kraštinės ilgį pažymėkime a. Tiesės dalija kvadratą į du stačiuosius trikampius DAE ir BCF bei keturkampį $BEDF$ (žr. pav.). Kiekvieno



iš jų plotas lygus trečdaliui kvadrato ploto, t. y. $a^2/3$. Kita vertus, trikampio DAE plotas lygus $AD \cdot AE/2 = a \cdot AE/2$. Taigi $a \cdot AE/2 = a^2/3$ ir $AE = 2a/3$. Panašiai $CF = 2a/3$. Pagal Pitagoro teoremą, $DE^2 = AD^2 + AE^2 = a^2 + 4a^2/9 = 13a^2/9$ ir $DE = a\sqrt{13}/3$.

Kadangi atkarpos DE ir FB lygiagrečios bei atkarpos DF ir EB lygiagrečios (jos yra kvadrato kraštinėse), tai keturkampis $BEDF$ yra lygiagretainis. Lygiagretainio plotas lygus kraštinės DE ir į ją iš bet kurio tiesės FB taško nuleisto statmens (aukštinės) ilgių sandaugai. Aukštinės ilgis lygus atstumui tarp tiesių DE ir FB, todėl $a^2/3 = DE \cdot 1 = a\sqrt{13}/3$ ir $a = \sqrt{13}$. Taigi kvadrato plotas lygus $a^2 = 13$.

Ats.: 13.

4 uždavinys. Aštuonis skaitmenis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 surašius tam tikra tvarka, gautas aštuonženklis skaičius $n = \overline{ABCDEFGH}$. Apie šešis triženklius skaičius $\overline{ABC}$, $\overline{BCD}$, $\ldots$, $\overline{FGH}$ yra žinoma, kad pirmasis iš jų dalijasi iš 7, antrasis – iš 6, trečiasis – iš 5, $\ldots$, šeštasis – iš 2. Be to, skaičius $\overline{DEF}$, kuris dalijasi iš 4, nesidalija iš 8. Raskite tokį skaičių n ir įrodykite, kad jis vienintelis.

Sprendimas. Ieškokime skaičiaus n skaitmenų galimų reikšmių. Kadangi $\overline{CDE}$ dalijasi iš 5 ir $E \neq 0$, tai $E = 5$. $\overline{DEF}$ dalijasi iš 4, todėl pagal dalumo iš 4 požymį

$\overline{EF} = \overline{5F}$ dalijasi iš 4. Tada skaitmuo F yra lyginis ir $F = 2, 4, 6$ arba 8. Tinka tik $F = 2$ ir $F = 6$.

Tarkime, kad $F = 6$. Tada $\overline{DEF} = 100D + 56$. Jei D lyginis, tai $\overline{DEF} = 8(25D/2 + 7)$ dalijasi iš 8. Bet jei D nelyginis, tai $\overline{BCD}$ nesidalija iš 2, todėl nesidalija iš 6.

Vadinasi, $F = 2$. Skaičius $\overline{EFG} = \overline{52G}$ dalijasi iš 3, todėl ir jo skaitmenų suma $7 + G$ dalijasi iš 3. Tikrindami galimas G reikšmes randame, kad $G = 2, 5$ arba 8. Tačiau skaitmenys 2 ir 5 jau panaudoti, tad $G = 8$. Skaičiai $\overline{BCD}$ ir $\overline{FGH}$ dalijasi iš 2, todėl D ir H turi būti dar nepanaudoti lyginiai skaitmenys, t. y. $D = 4, H = 6$ arba $D = 6, H = 4$. Tada skaičius $\overline{ABC}$, dalus iš 7, sudarytas iš skaitmenų 1, 3, 7. Patikrinkime visas 6 galimybes: turime skaičius 137, 173, 317, 371, 713, 731, iš kurių tik skaičius 371 yra dalus iš 7. Tada $A = 3, B = 7, C = 1$. Skaičius $\overline{BCD} = \overline{71D}$ dalijasi iš 6, todėl $D \neq 6$ ir $D = 4, H = 6$. Skaičius $n = 37145286$ tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: $n = 37145286$.

5 uždavinys. Žinoma, kad realusis skaičius x nelygus 0 ir kad lygiai trys iš keturių skaičių

$$x, \quad x + x^{-1}, \quad x^2 + x^{-2}, \quad x^2 - 4x$$

yra sveikieji. Raskite visas galimas skaičiaus x reikšmes.

Pastaba. Galima naudotis faktu, kad jei natūralusis skaičius a nėra tikslusis kvadratas, tai $\sqrt{a}$ yra iracionalusis skaičius.

Sprendimas. Nustatykime, kurie trys skaičiai turi būti sveikieji. Tarkime, kad skaičius x yra sveikasis. Tada ir $x^2 - 4x$ yra sveikasis skaičius. Vienas iš skaičių $x + x^{-1}$ ir $x^2 + x^{-2}$ taip pat turi būti sveikasis. Todėl sveikasis yra vienas iš skaičių $1/x = x^{-1} = x + x^{-1} - x$ ir $1/x^2 = x^2 + x^{-2} - x^2$. Arba x, arba x^2 dalija skaičių 1, bet tada $x = \pm 1$. Abiem atvejais visi keturi pradiniai skaičiai bus sveikieji. Vadinasi, skaičius x nėra sveikasis, o likę trys pradiniai skaičiai yra.

Pastebėkime, kad jei skaičius $x + x^{-1}$ yra sveikasis, tai toks yra ir skaičius $x^2 + x^{-2} = (x + x^{-1})^2 - 2$. Taigi pastaruoju skaičiumi galime nesirūpinti. Turime ieškoti tokių x reikšmių, kad

$$\begin{cases} x + x^{-1} = m, \\ x^2 - 4x = n \end{cases}$$

su tam tikrais sveikaisiais skaičiais m ir n. Lygybes galime perrašyti taip:

$$\begin{cases} x^2 - mx + 1 = 0, \\ x^2 - 4x - n = 0. \end{cases}$$

Išspręskime vieną iš lygčių, pvz. antrąją, x atžvilgiu: $x = 2 \pm \sqrt{n+4}$. (Žinoma, $n+4 > 0$.) Jei $n+4$ yra tikslusis kvadratas, tai x yra sveikasis skaičius, o taip būti negali. Tad $n+4$ nėra tikslusis kvadratas, o $\sqrt{n+4}$, todėl ir x yra iracionalieji skaičiai.

Įstatykime gautąsias x reikšmes į pirmąją lygtį:

$$(2 \pm \sqrt{n+4})^2 - m(2 \pm \sqrt{n+4}) + 1 = 4 \pm 4\sqrt{n+4} + n + 4 - 2m \mp m\sqrt{n+4} + 1 =$$
$$= (9 + n - 2m) \pm \sqrt{n+4} \cdot (4 - m) = 0.$$

Jei $m \neq 4$, tai $\sqrt{n+4} = \pm(9 + n - 2m)/(m-4)$ yra racionalusis skaičius. Taigi $m = 4$ ir $9 + n - 2 \cdot 4 + 0 = 1 + n = 0$. Vadinasi, $n = -1$ ir $x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Šį rezultatą galima gauti ir kitaip: atimkime pirmąją lygtį iš antrosios: $-4x - n - -(-mx + 1) = 0$ arba $(m-4)x = n+1$. Vėlgi jei $m \neq 4$, tai $x = (n+1)/(m-4)$ nėra iracionalusis skaičius, o jei $m = 4$, tai $n + 1 = 0$.

Abi gautos x reikšmės tinka. Išties skaičius $\sqrt{3}$ yra iracionalusis, todėl ir skaičius x nėra sveikasis. Abi reikšmės yra lygties $x^2 - 4x + 1 = 0$ šaknys, todėl tenkina ekvivalenčias lygybes $x^2 + 1 = 4x$, $x + x^{-1} = 4$ ir $x^2 - 4x = 1$. Be to, $x^2 + x^{-2} = = (x + x^{-1})^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14$.

Ats.: $x = 2 + \sqrt{3}$ arba $x = 2 - \sqrt{3}$.