2017 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai

Artūras Dubickas[1]

66-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Kaunas, 2017 03 17

1 (9-10 klasės). Įrodykite, kad

$$x^2 + xy^2 + xyz^2 + 4 \geqslant 4xyz,$$

jei $x, y, z \geqslant 0$.

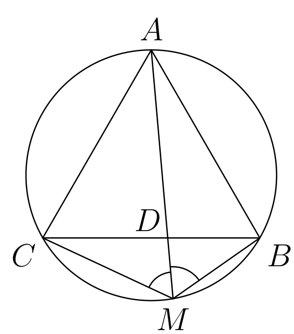
Sprendimas. Kadangi $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geqslant 0$, tai $x^2 \geqslant 4x - 4$. Analogiškai, $y^2 \geqslant 4y - 4$ ir $z^2 \geqslant 4z - 4$. Sudėję pirmąją nelygybę su antrąja, padauginta iš $x \geqslant 0$, ir su trečiąja, padauginta iš $xy \geqslant 0$, gausime

$$x^2 + xy^2 + xyz^2 \geqslant 4x - 4 + 4xy - 4x + 4xyz - 4xy = 4xyz - 4.$$

Iš čia išplaukia reikiama nelygybė.

2 (9-10 klasės). Apie lygiakraštį trikampį ABC apibrėžto apskritimo mažesniajame lanke BC pažymėtas toks taškas M, kad $MB = 21$, $MC = 28$. Tiesės AM ir BC kertasi taške D. Raskite atkarpos MD ilgį.

Sprendimas. Pastebėkime, kad $\angle CMA = \angle CBA = 60^\circ = \angle BCA = \angle AMB$.



[1]Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko 24, Vilnius LT-03225. http://www.mif.vu.lt/∼dubickas/

Vadinasi, MD yra trikampio BMC pusiaukampinė. Pagal pusiaukampinės savybę, $CD : DB = MC : MB = 28 : 21 = 4 : 3$, todėl

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CD}{CB} = \frac{CD}{CD + DB} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3} + 1} = \frac{4}{7}.$$

Kadangi $\angle CDA = \angle MDB$ ir $\angle DCA = 60^\circ = \angle DMB$, tai trikampiai DCA ir DMB yra panašūs. Vadinasi, $MD : MB = CD : CA = 4 : 7$. Iš čia gauname, kad $MD = \frac{4}{7}MB = \frac{4}{7} \cdot 21 = 12$.

Atsakymas: $MD = 12$.

3 (9-10 klasės). Į lentelės 7×7 langelius surašyti realieji skaičiai taip, kad kiekvieno 3×3 kvadrato visų devynių skaičių sandauga ir kiekvieno 4×4 kvadrato visų šešiolikos skaičių sandauga yra lygi tam pačiam skaičiui S. Ar gali (su bent viena S reikšme) visų keturiasdešimt devynių tos lentelės skaičių sandauga būti lygi 2017?

I sprendimas. Tegul $a > 0$ ir $b = \frac{1}{a}$. Lentelę užpildykime taip.

a	b	a	b	a	b	a
b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1
a	b	a	b	a	b	a
b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1
a	b	a	b	a	b	a

Matome, kad į kiekvieną 3×3 kvadratą patenka trys skaičiai a, trys skaičiai $b = \frac{1}{a}$ ir trys vienetai, taigi visų devynių skaičių sandauga yra lygi $a^3b^31^3 = 1$. Akivaizdu, kad kiekvieno 2×2 kvadrato keturių skaičių sandauga yra lygi 1. Vadinasi, kiekvieno 4×4 kvadrato visų šešiolikos skaičių sandauga taip pat lygi 1. Į visą lentelę 7×7 patenka aštuoniolika skaičių a, septyniolika skaičių $b = \frac{1}{a}$ ir keturiolika vienetų, taigi visų keturiasdešimt devynių šios lentelės skaičių sandauga yra lygi $a^{18}b^{17}1^{14} = a$.

Imdami $a = 2017$ ir $b = \frac{1}{2017}$ gauname reikiamą lentelę, nes ji tenkina uždavinio sąlygą (su $S = 1$), o joje įrašytų skaičių sandauga yra lygi 2017.

Atsakymas: gali.

II sprendimas.[2] Bandome sukonstruoti lentelę, kurioje į vienodą 4×4 kvadratų skaičių patenkančiuose langeliuose esantys skaičiai yra vienodi. Šioje lentelėje surašyti skaičiai žymi tų patekimų į 4×4 kvadratus skaičių.

1	2	3	4	3	2	1
2	4	6	8	6	4	2
3	6	12	12	12	6	3
4	8	12	16	12	8	4
3	6	12	12	12	6	3
2	4	6	8	6	4	2
1	2	3	4	3	2	1

Pradėkime lentelę pildyti nuo viduryje esančio langelio, įrašydami į jį skaičių 16. Į langelius, kuriuose įrašyti skaičiai 12, rašome -2, kad viduryje esančio 3×3 kvadrato skaičių suma būtų lygi 0. Eidami sluoksniais nuo lentelės vidurio į kraštus ir spręsdami atitinkamas tiesinių lygčių sistemas mes galime užpildyti lentelę taip, kad kiekvieno 3×3 kvadrato visų devynių skaičių suma ir kiekvieno 4×4 kvadrato visų šešiolikos skaičių suma būtų lygi 0. Langeliuose su skaičiumi 4 įrašyti skaičiai nėra vienodi (10 ir 12), nes paskutiniajame sluoksnyje įvestas naujas kintamasis, o ne automatiškai įrašytas skaičius 12.

4	-13	1	10	1	-13	4
-13	12	5	-16	5	12	-13
1	5	-2	-2	-2	5	1
10	-16	-2	16	-2	-16	10
1	5	-2	-2	-2	5	1
-13	12	5	-16	5	12	-13
4	-13	1	10	1	-13	4

Dabar, pakeisdami k į x^k, gausime lentelę, kurioje kiekvieno 3×3 kvadrato visų devynių skaičių sandauga ir kiekvieno 4×4 kvadrato visų šešiolikos skaičių sandauga yra lygi 1. Visų keturiasdešimt devynių tos lentelės skaičių sandauga yra lygi x^{-16}. Imdami tokį x, su kuriuo $x^{-16} = 2017$, gausime reikiamą lentelę.

[2] Šį sprendimą pasiūlė Adomas Birštunas

4 (9-10 klasės). Natūraliųjų skaičių ketvertas (a, b, c, d) tenkina lygčių sistemą

$$\begin{cases} ab - a - b = c + d - 3, \\ cd - c - d = a + b - 3. \end{cases}$$

a) Raskite bent du tokius ketvertus.

b) Rasite visus tokius ketvertus.

Sprendimas. Atėmę iš vienos lygties kitą, gauname $ab = cd$. Kita vertus, sudėję abi lygtis, matome, kad

$$ab + cd - 2(a + b + c + d) = (a - 2)(b - 2) + (c - 2)(d - 2) - 8 = -6.$$

Vadinasi, duotoji lygčių sistema yra ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} (a - 2)(b - 2) + (c - 2)(d - 2) = 2, \\ ab = cd. \end{cases}$$

Jei $a, b, c, d \geqslant 3$, tai $(a-2)(b-2) \geqslant 1$ ir $(c-2)(d-2) \geqslant 1$. Vadinasi, pirmoji lygtis $(a - 2)(b - 2) + (c - 2)(d - 2) = 2$ galioja tik su $a - 2 = b - 2 = c - 2 = d - 2 = 1$, t. y. $(a, b, c, d) = (3, 3, 3, 3)$. Akivaizdu, kad šis ketvertas tenkina lygčių sistemą.

Priešingu atveju, mažiausias iš skaičių a, b, c, d yra lygus 1 arba 2. Pastebėkime, kad jei ketvertas (a, b, c, d) yra lygčių sistemos sprendinys, tai ketvertai $(a, b, d, c), (b, a, c, d), (b, a, d, c), (c, d, a, b), (c, d, b, a), (d, c, a, b), (d, c, b, a)$ taip pat tenkina šią sistemą. Vadinasi, neprarasdami bendrumo, galime laikyti, kad tas mažiausias skaičius (iš a, b, c ir d) arba vienas iš kelių mažiausių yra a.

Jei $a = 1$, tai iš pirmosios lygties gauname $c + d = 3 + ab - a - b = 2$. Taigi $c = d = 1$. Tada $b = cd - c - d - a + 3 = 1$. Akivaizdu, kad ketvertas $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$ tenkina duotąją lygčių sistemą. Jei mažiausias yra koks nors kitas skaičius b, c arba d, tai gauname tą patį sprendinį $(1, 1, 1, 1)$.

Tarkime, kad $a = 2$. Nagrinėsime ekvivalenčią lygčių sistemą. Iš pirmosios lygties $(a - 2)(b - 2) + (c - 2)(d - 2) = 2$ gauname $(c - 2)(d - 2) = 2$. Be to, $c, d \geqslant 2$, nes skaičius $a = 2$ yra mažiausias iš skaičių a, b, c, d. Taigi vienintelės įmanomos poros yra $(c, d) = (3, 4)$ ir $(4, 3)$. Abiem atvejais, iš antrosios lygties gauname $b = cd/a = 6$. Ketvertai $(a, b, c, d) = (2, 6, 3, 4)$ ir $(2, 6, 4, 3)$ tenkina šią (ir tuo pačiu duotąją) lygčių sistemą. Perstatydami gausime dar šešis ketvertus: $(6, 2, 3, 4)$, $(6, 2, 4, 3)$, $(3, 4, 2, 6)$, $(3, 4, 6, 2)$, $(4, 3, 2, 6)$ ir $(4, 3, 6, 2)$. Visi šie ketvertai tenkina duotąją lygčių sistemą.

Atsakymas: $(a,b,c,d) = (1,1,1,1), (3,3,3,3), (2,6,3,4), (2,6,4,3), (6,2,3,4),$
$(6,2,4,3), (3,4,2,6), (3,4,6,2), (4,3,2,6), (4,3,6,2).$

5 (11-12 klasės). Raskite visus realiuosius skaičius x, kurie tenkina tokią sąlygą: bet kuriems realiesiems skaičiams

$$0 < a \leqslant b \leqslant c < a + b$$

teisinga nelygybė

$$x + c \leqslant (x + a)(x + b).$$

Sprendimas. Nesunku įsitikinti, kad su kiekvienu $x \geqslant 1$ ir bet kuriais $a, b, c \in \mathbb{R}$, tenkinančiais sąlygą $0 < a \leqslant b \leqslant c < a + b$, reikiama nelygybė galioja:

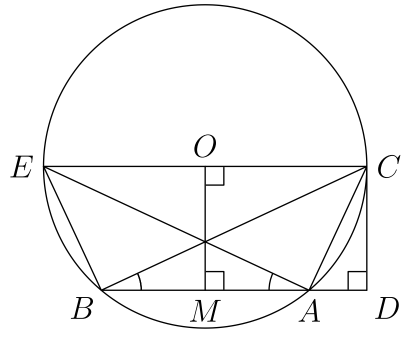
$$x + c \leqslant x^2 + c < x^2 + a + b \leqslant x^2 + x(a + b) < x^2 + x(a + b) + ab = (x + a)(x + b).$$

Su kitais x, t. y. $x < 1$, nesudėtinga sukonstruoti kontrpavyzdį, kai galioja priešinga nelygybė $x + c > (x + a)(x + b)$. Imkime bet kokį teigiamą skaičių z iš intervalo $(x, 1)$ ir $a = b = c = z - x$. Šis trejetas tenkina sąlygą, kadangi $z - x > 0$. Be to, $z > z^2$, nes $0 < z < 1$. Kadangi $x + a = x + b = x + c = z$, tai galioja priešinga nelygybė: $x + c = z > z^2 = (x + a)(x + b)$.

Atsakymas: $x \in [1, +\infty)$.

6 (11-12 klasės). Duotas trikampis ABC, kuriame $\angle A - \angle B = 90^\circ$. Tegul D yra statmens iš viršūnės C į tiesę AB pagrindas, o M – atkarpos AB vidurio taškas. Įrodykite, kad atkarpos MD ilgis yra lygus apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo spinduliui.

I sprendimas. Tarkime, kad EC yra apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo



skersmuo, o O – jo centras. Pažymėkime $R = OA = OB = OC$. Kadangi $\angle EAC = 90^0$ (nes kampas remiasi į skersmenį) ir $\angle BAC = \angle CBA + 90°$, tai

$$\angle EAB = \angle BAC - \angle EAC = \angle CBA + 90° - \angle EAC = \angle CBA.$$

Vadinasi, lankai EB ir CA yra lygūs, taigi tiesės AB ir EC – lygiagrečios. Tai reiškia, kad $ABEC$ – lygiašonė trapecija. Kadangi O ir M – jos pagrindų EC ir AB vidurio taškai, tai tiesė MO yra statmena pagrindams. Vadinasi, $MOCD$ yra stačiakampis, todėl jo priešingos kraštinės lygios: $MD = OC = R$.

II sprendimas. Tegul α, β, γ yra trikampio kampai ($\alpha - \beta = 90°$), o a, b, c – jo (atitinkamos) kraštinės. Kadangi $\angle CAD = 180° - \alpha = 90° - \beta$, tai $\angle ACD = \beta$. Vadinasi, $AD = AC \sin\beta = b \sin\beta$. Be to, $MA = \frac{c}{2}$. Remiantis sinusų teorema, $b = 2R\sin\beta$ ir $c = 2R\sin\gamma$, taigi

$$MD = MA + AD = R(\sin\gamma + 2\sin^2\beta) = R + R(\sin\gamma - \cos(2\beta)).$$

Iš čia išplaukia reikiama lygybė $MD = R$, nes

$$\sin\gamma = \sin(180° - \alpha - \beta) = \sin(90° - 2\beta) = \cos(2\beta).$$

7 (11-12 klasės). Verslininkas Ramūnas padovanojo darželio vaikams 2000 balionų. Balionai buvo 20 skirtingų spalvų, po 100 kiekvienos spalvos. Darželio vedėja Austėja davė kiekvienam iš 100 darželį lankančių vaikų 20 balionų, bet neatsižvelgė į jų spalvą. Vaikai norėtų susikeisti balionais taip, kad kiekvienas iš jų turėtų po 20 skirtingų spalvų balionų. Austėja leidžia bet kuriems dviem vaikams susikeisti dviem balionais (kai jie paima vienas iš kito po vieną balioną), tačiau ne bet kaip, o tik kai kiekvienas iš jųdviejų ima iš kito tokios spalvos balioną, kurios jis prieš šiuos jųdviejų mainus neturi. Ar visada (kad ir kaip Austėja pradžioje būtų išdalinusi balionus) vaikai gali taip keistis balionais, kad po baigtinio skaičiaus tokių mainų kiekvienas iš jų turėtų po 20 skirtingų spalvų balionų?

Sprendimas. Įrodysime, kad vaikai gali taip keistis balionais, kad po ne daugiau kaip 1900 tokių mainų jie visi turės skirtingų spalvų balionus.

Tarkime, kad po Austėjos padalijimo ℓ-tasis vaikas turi dvidešimt lygiai k_ℓ skirtingų spalvų balionų (čia $\ell = 1, \ldots, 100$). Tegul $S_0 = k_1 + \cdots + k_{100}$. Akivaizdu, kad $1 \leqslant k_\ell \leqslant 20$, taigi $100 \leqslant S_0 \leqslant 2000$.

Jei $S_0 = 2000$, tai $k_1 = \cdots = k_{100} = 20$ ir teiginys įrodytas. Tarkime, kad $S_0 < 2000$. Tegul k_i yra pats mažiausias iš skaičių $k_1, \ldots, k_{100}$ (arba bet kuris iš kelių mažiausiųjų). Aišku, kad $k_i < 20$. Pagal Dirichlė principą, šis (i-tasis) vaikas turi bent du kokios nors vienos spalvos (tarkime, spalvos R) balionus. Kadangi R spalvos balionų yra lygiai 100, tai atsiras toks vaikas j (čia $j \neq i$), kuris R spalvos balionų iš viso neturi. Pagal Dirichlė principą, iš nelygybės $k_j \geqslant k_i$ išplaukia, kad egzistuoja tokia spalva M, kad j-tasis vaikas turi bent vieną M spalvos balioną, o i-tasis M spalvos balionų neturi. Vadinasi, šie du vaikai (i-tasis ir j-tasis) gali susikeisti R ir M spalvų balionais: i-tasis pasiima iš j-tojo M spalvos balioną, o j-tasis iš i-tojo R spalvos balioną. Po šių mainų i-tasis vaikas turės lygiai $k_i + 1$ skirtingų spalvų balionų (tas pačias spalvas, kurias jau turėjo, bei naują spalvą M), o j-tasis vaikas turės arba k_j skirtingų spalvų balionų (tuo atveju, kai jis turėjo tik vieną M spalvos balioną, jį atidavė ir spalvą M prarado, tačiau gavo R spalvos balioną) arba $k_j + 1$ skirtingų spalvų balionų (tuo atveju, kai jis turėjo bent du M spalvos balionus).

Tarkime, kad po šių mainų ℓ-tasis vaikas turi m_ℓ skirtingų spalvų balionų (čia $\ell = 1, \ldots, 100$). Įrodėme, kad $m_i = k_i + 1$ ir $m_j = k_j$ arba $m_j = k_j + 1$. Be to, akivaizdu, kad $m_\ell = k_\ell$, kai $\ell \neq i$ ir $\ell \neq j$. Vadinasi,

$$S_1 = m_1 + \cdots + m_{100} \geqslant k_1 + \cdots + k_{100} + 1 = S_0 + 1.$$

Jei $S_1 = 2000$, tai $m_1 = \cdots = m_{100} = 20$ ir teiginys įrodytas. Jei $S_1 < 2000$, tai mažiausias iš skaičių $m_1, \ldots, m_{100}$ yra mažesnis už 20. Tada, samprotaudami lygiai taip pat kaip ir aukščiau, vėl galime atrasti tokius du vaikus, kuriems pasikeitus balionais nauja suma S_2 padidės bent vienetu (lyginant su prieš tai buvusia suma S_1), ir taip toliau. Kadangi $S_0 \geqslant 100$, o vaikai nustoja keistis balionais po k tokių mainų, kai tik skaičius S_k tampa lygus 2000, tai po daugiausiai $2000 - 100 = 1900$ mainų visi vaikai turės skirtingų spalvų balionus.

Atsakymas: visada.

8 (11-12 klasės). Natūralusis skaičius m vadinamas *tvarkingu*, jei su bet kuriais natūraliaisiais skaičiais a ir b skaičius $a^{2m} + b^{2m} + a^m b^m$ dalijasi iš $a^2 + b^2 + ab$.

a) Įrodykite, kad skaičius 2 yra tvarkingas.
b) Ar skaičius 100 yra tvarkingas?
c) Ar skaičius 101 yra tvarkingas?
d) Raskite visus tvarkingus skaičius.

Sprendimas. Tarkime, kad skaičius m yra tvarkingas, t. y. su bet kuriais $a, b \in \mathbb{N}$ skaičius $a^{2m} + b^{2m} + a^m b^m$ dalijasi iš $c = a^2 + b^2 + ab$. Įrodysime, kad tada skaičius $m+3$ taip pat yra tvarkingas. Kadangi $a^3 - b^3 = (a-b)c$, tai dešinioji lygybės

$$a^{2(m+3)} + b^{2(m+3)} + a^{m+3}b^{m+3} = a^3b^3(a^{2m} + b^{2m} + a^m b^m) + (a^3 - b^3)(a^{2m+3} - b^{2m+3})$$

pusė dalijasi iš c. Taigi ir kairioji lygybės pusė dalijasi iš c, todėl skaičius $m+3$ yra tvarkingas. Iš čia išplaukia, kad bet koks skaičius $m + 3k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, taip pat yra tvarkingas.

Akivaizdu, kad skaičius 1 yra tvarkingas. Dešinioji lygybės

$$a^4 + b^4 + a^2b^2 = a^2(a^2 + b^2 + ab) + b(b^3 - a^3)$$

pusė dalijasi iš c, todėl ir kairioji pusė dalijasi iš c. Vadinasi, skaičius 2 yra tvarkingas: a) dalis įrodyta.

Kadangi skaičiai 1 ir 2 tvarkingi, tai, remiantis aukščiau įrodytu teiginiu, visi skaičiai $m = 3k + 1$ ir $m = 3k + 2$ yra tvarkingi; čia $k = 0, 1, 2, \ldots$. Vadinasi, visi natūralieji skaičiai, kurie nesidalija iš 3, yra tvarkingi. Skaičiai, nurodyti b) ir c) dalyse, 100 ir 101, nesidalija iš 3, taigi jie abu yra tvarkingi.

Įrodysime, kad $3k + 1$ ir $3k + 2$ pavidalo skaičiai ($k = 0, 1, 2, \ldots$) ir yra visi tvarkingi skaičiai, t. y. joks natūralusis skaičius $m = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, nėra tvarkingas. Tarkime priešingai, kad $m = 3k$ su kokiu nors $k \in \mathbb{N}$ yra tvarkingas skaičius. Nagrinėkime porą $(a, b) = (2, 1)$. Tada, remiantis tvarkingo skaičiaus apibrėžimu,

$$a^{2m} + b^{2m} + a^m b^m = a^{6k} + b^{6k} + a^{3k}b^{3k} = 2^{6k} + 2^{3k} + 1$$

dalijasi iš $a^2 + b^2 + ab = 7$. Kadangi 2^3 moduliu 7 yra 1, tai $2^{6k} \pmod 7 = 1$ ir $2^{3k} \pmod 7 = 1$. Vadinasi, skaičius $2^{6k} + 2^{3k} + 1$ moduliu 7 yra lygus 3 su visais $k \in \mathbb{N}$, todėl jis nesidalija iš 7, prieštara.

Įrodėme, kad natūralusis skaičius m yra tvarkingas tada ir tik tada, kai jis nesidalija iš 3.

Atsakymas: b) taip; c) taip; d) visi natūralieji skaičiai, kurie nesidalija iš 3.