Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Rajono (miesto) etapo užduočių 9 - 10 klasei sprendimai
2015 m.

**1 uždavinys.** Raidės $a$, $b$, $c$ ir $d$ žymi skirtingus skaitmenis. Sudauginus dviženklius natūraliuosius skaičius $\overline{ab}$ ir $\overline{cb}$, gaunamas triženklis skaičius $\overline{ddd}$. Raskite visas galimas reiškinio $(a+c)(a^2+c^2)(a^a+c^c)$ reikišmes.

*Sprendimas.* Kadangi $111 = 3 \cdot 37$, tai $\overline{ddd} = d \cdot 111 = d \cdot 3 \cdot 37$. Be to, skaičius 37 yra pirminis, t. y. jo neįmanoma išreikšti mažesnių natūraliųjų skaičių sandauga. Taigi sandauga $\overline{ab} \cdot \overline{cb}$ dalijasi iš 37, todėl bent vienas iš dviženklių skaičių $\overline{ab}$ arba $\overline{cb}$ dalijasi iš 37. Sakykime, kad skaičius $\overline{ab}$ dalijasi iš 37. Tada $\overline{ab} = 37$ arba $\overline{ab} = 2 \cdot 37 = 74$ (didesni skaičiaus 37 kartotiniai turės mažiausiai 3 skaitmenis).

Jei $\overline{ab} = 37$, tai iš lygybės $\overline{ddd} = \overline{ab} \cdot \overline{cb}$ gauname $\overline{cb} = 3 \cdot d$. Skaičius $\overline{cb}$ turi baigtis skaitmeniu 7, nes $\overline{ab} = 37$. Patikrinę galimas $d$ reikšmes, gauname $d = 9$ ir $\overline{cb} = 27$. Patikrinę gauname, kad skaičiai $\overline{ab} = 37$ ir $\overline{cb} = 27$ tenkina uždavinio sąlygą.

Tarkime, kad $\overline{ab} = 74$. Tad iš $\overline{ddd} = \overline{ab} \cdot \overline{cb}$ gauname $2 \cdot \overline{cb} = 3d$. Kadangi $b = 4$, tai skaičius $2 \cdot \overline{cb}$ baigiasi skaitmeniu 8. Todėl ir skaičius $3d$ baigiasi skaitmeniu 8. Taigi $d = 6$. Bet tada iš lygybės $2 \cdot \overline{cb} = 3d$ gauname $\overline{cb} = 9$, o taip būti negali, nes $\overline{cb}$ – dviženklis skaičius.

Panašiai nagrinėdami atvejį, kai skaičius $\overline{cb}$ dalijasi iš 37, gauname, kad skaičiai $\overline{ab} = 27$ ir $\overline{cb} = 37$ taip pat tenkina uždavinio sąlygą.

Taigi $a = 3$ ir $c = 2$ arba $a = 2$ ir $c = 3$. Bet kokiu atveju

$$(a+c)(a^2+c^2)(a^a+c^c) = (2+3)(2^2+3^2)(2^2+3^3) = 2015.$$

Ats.: 2015.

**2 uždavinys.** Penkių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sekoje pirmųjų trijų skaičių kvadratų suma lygi paskutiniųjų dviejų skaičių kvadratų sumai. a) Raskite bent vieną tokį rinkinį. b) Ar yra daugiau tokių rinkinių?

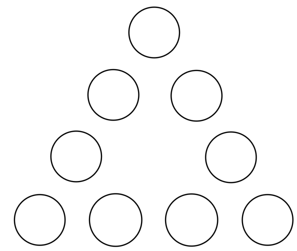
*Sprendimas.* Iš karto spręsime uždavinio b) dalį. Tarkime, kad natūraliųjų skaičių seka $n$, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ tenkina uždavinio sąlygą, t. y.

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n+3)^2 + (n+4)^2.$$

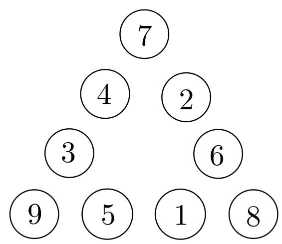
Atskliautę ir sutraukę panašius narius, gauname lygtį $n^2 - 8n - 20 = 0$. Šios lygties sprendiniai yra $n = 10$ ir $n = -2$. Kadangi $n$ – natūralusis skaičius, tai tinka tik $n = 10$. Vadinasi, uždavinio sąlygą tenkina vienintelė natūraliųjų skaičių seka 10, 11, 12, 13, 14.

Ats.: uždavinio sąlygą tenkina vienintelė natūraliųjų skaičių seka 10, 11, 12, 13, 14.

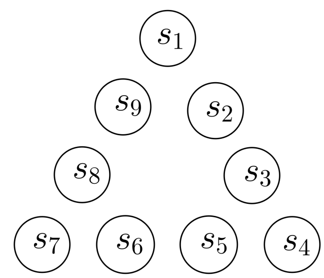
**3 uždavinys.** Į kiekvieną paveikslėlyje pavaizduotą apskritimą Sofija įrašė po vieną skaitmenį nuo 1 iki 9. Visi devyni apskritimuose įrašyti skaitmenys skirtingi. Paaiškėjo, kad išilgai kiekvienos trikampio kraštinės esančiuose keturiuose apskritimuose įrašytų skaičių suma yra ta pati. Šią sumą pažymėkime $S$. a) Nurodykite bent vieną skaitmenų nuo 1 iki 9 surašymą, kuriam $S = 23$. b) Ar Sofija galėjo gauti $S = 24$?



*Sprendimas.* a) Pavyzdys su $S = 23$:




b) Tarkime, kad į paveikslėlyje pavaizduotus apskritimus Sofija taip įrašė skaitmenis nuo 1 iki 9, kad išilgai kiekvienos trikampio kraštinės esančiuose keturiuose apskritimuose įrašytų skaičių suma yra tas pats skaičius $S$. Apskritimuose įrašytus skaitmenis pažymėkime $s_1, s_2, \ldots, s_9$, kaip parodyta paveikslėlyje. Taigi




$$
\begin{aligned}
S &= s_1 + s_2 + s_3 + s_4, \\
S &= s_4 + s_5 + s_6 + s_7, \\
S &= s_7 + s_8 + s_9 + s_1.
\end{aligned}
$$

Sudėję šias lygybes, gauname

$$
\begin{aligned}
3S &= s_1 + s_2 + \cdots + s_9 + (s_1 + s_4 + s_7) = \\
&= 1 + 2 + \cdots + 9 + (s_1 + s_4 + s_7) = \\
&= 45 + (s_1 + s_4 + s_7).
\end{aligned}
$$

Todėl

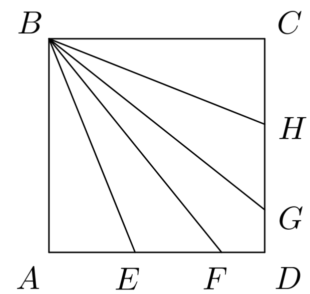
$$S = 15 + \frac{s_1 + s_4 + s_7}{3}.$$

Kadangi skaitmenys $s_1$, $s_4$ ir $s_7$ yra skirtingi, tai

$$S = 15 + \frac{s_1 + s_4 + s_7}{3} \leqslant 15 + \frac{7+8+9}{3} = 23.$$

Vadinasi, Sofija negalėjo gauti skaitmenų išdėstymo su $S = 24$.

Ats.: b) ne.




**4 uždavinys.** Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis yra 5. Kraštinėse $AD$ ir $CD$ pažymėti taškai $E$, $F$, $G$ ir $H$: taškai $E$ ir $F$ priklauso atkarpai $AD$, o taškai $G$ ir $H$ – atkarpai $CD$; taškas $E$ priklauso atkarpai $AF$, o taškas $H$ – atkarpai $CG$ (žr. pav.). Atkarpos $BE$, $BF$, $BG$ ir $BH$ kvadratą $ABCD$ dalija į penkias vienodo ploto dalis. Raskite atkarpos $FG$ ilgį.

*Sprendimas.* Kvadrato plotas $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 25$. Kadangi atkarpos $BE$, $BF$, $BG$ ir $BH$ kvadratą $ABCD$ dalija į penkias vienodo ploto dalis, tai trikampių $ABE$ ir $EBF$ plotai lygūs penktadaliui kvadrato ploto, t. y.

$$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle EBF} = \frac{1}{5} S_{ABCD} = 5.$$

Atkarpa $BA$ yra trikampių $ABE$ ir $EBF$ aukštinė, todėl

$$AE = \frac{2S_{ABE}}{BA} = \frac{2 \cdot 5}{5} = 2,$$

$$AF = \frac{2S_{EBF}}{BA} = \frac{2 \cdot 5}{5} = 2.$$

Taigi $FD = AD - AE - EF = 5 - 2 - 2 = 1$. Panašiai gauname, kad $GD = 1$. Pagal Pitagoro teoremą trikampiui $FDG$ gauname $FG = \sqrt{FD^2 + GD^2} = \sqrt{2}$.

Ats.: $FG = \sqrt{2}$.

**5 uždavinys.** Raskite visus realiuosius skaičius $x \neq 0$, su kuriais abu skaičiai $x + \sqrt{35}$ ir $\frac{1}{x} - \sqrt{35}$ yra sveikieji.

*Pirmasis sprendimas.* Tarkime, kad realusis skaičius $x$ tenkina uždavinio sąlygą. Tada egzistuoja tokie sveikieji skaičiai $m$ ir $n$, kad $x + \sqrt{35} = m$ ir $\frac{1}{x} - \sqrt{35} = n$. Išraišką $x = m - \sqrt{35}$ statome į antrąją lygybę:

$$\frac{1}{m - \sqrt{35}} - \sqrt{35} = n.$$

Abi lygybės puses padauginę iš $m - \sqrt{35}$, gauname

$$1 - \sqrt{35}(m - \sqrt{35}) = n(m - \sqrt{35}).$$

Atskliautę ir sutraukę panašiuosius narius turime lygybę

$$(m-n)\sqrt{35}=36-mn. \tag{1}$$

Jei $m-n\neq 0$, tai iš paskutinės lygybės išplaukia, kad $\sqrt{35}=\frac{36-mn}{m-n}$. Tačiau tai neįmanoma, nes skaičius $\sqrt{35}$ yra iracionalusis, o $\frac{36-mn}{m-n}$ – racionalusis.

Vadinasi, $m=n$. Tada iš (1) lygybės turime $36-mn=0$, t. y. $m^2=36$. Taigi $m=\pm 6$. Tada $x=\pm 6-\sqrt{35}$. Nesunku įsitikinti, kad abu šie skaičiai tenkina uždavinio sąlygą. Iš tikrųjų, $x+\sqrt{35}=(\pm 6-\sqrt{35})+\sqrt{35}=\pm 6$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}-\sqrt{35}=\frac{1}{\pm 6-\sqrt{35}}-\sqrt{35}&=\frac{\pm 6+\sqrt{35}}{(\pm 6-\sqrt{35})(\pm 6+\sqrt{35})}-\sqrt{35}=\\&=\frac{\pm 6+\sqrt{35}}{6^2-35}-\sqrt{35}=\pm 6.\end{aligned}$$

Ats.: $x=\pm 6-\sqrt{35}$.

Pateiksime dar vieną sprendimą, kuriame nenaudojamas faktas, kad skaičius $\sqrt{35}$ yra iracionalusis.

*Antrasis sprendimas.* Tarkime, kad realusis skaičius $x$ tenkina uždavinio sąlygą. Tada skaičius $\frac{-1}{x}$ taip pat tenkina uždavinio sąlygą:

$$\begin{aligned}&\frac{-1}{x}+\sqrt{35}=-\left(\frac{1}{x}-\sqrt{35}\right) \quad \text{– sveikasis skaičius,}\\&\frac{1}{\frac{-1}{x}}-\sqrt{35}=-\left(x+\sqrt{35}\right) \quad \text{– sveikasis skaičius.}\end{aligned}$$

Taigi toliau galime laikyti, kad $x>0$ (jei $x<0$, nagrinėjame skaičių $\frac{-1}{x}>0$). Kadangi skaičius $x+\sqrt{35}$ yra sveikasis, tai egzistuoja toks natūralusis skaičius $n$, kad

$$x+\sqrt{35}=n.$$

Be to, $n\geqslant 6$, nes $n=x+\sqrt{35}>\sqrt{35}>5$. Jei $n=6$, tai $x=6-\sqrt{35}$ ir

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}-\sqrt{35}=\frac{1}{6-\sqrt{35}}-\sqrt{35}&=\frac{6+\sqrt{35}}{(6-\sqrt{35})(6+\sqrt{35})}-\sqrt{35}=\\&=\frac{6+\sqrt{35}}{6^2-35}-\sqrt{35}=6.\end{aligned}$$

Vadinasi, skaičius $6-\sqrt{35}$ tenkina uždavinio sąlygą. Todėl ir skaičius $\frac{-1}{6-\sqrt{35}}=-6-\sqrt{35}$ tenkina uždavinio sąlygą.

Sakykime, kad $n\geqslant 7$. Tada $x=n-\sqrt{35}\geqslant 7-\sqrt{35}>1$, todėl $0<\frac{1}{x}<1$. Kadangi skaičius $\frac{1}{x}-\sqrt{35}$ yra sveikasis, tai skaičius $5+\frac{1}{x}-\sqrt{35}$ taip pat yra sveikasis. Be to,

$$-1<5-\sqrt{35}<5+\frac{1}{x}-\sqrt{35}<6-\sqrt{35}<1,$$

t. y. sveikasis skaičius $5+\frac{1}{x}-\sqrt{35}$ priklauso intervalui $(-1,\,1)$. Vadinasi, $5+\frac{1}{x}-\sqrt{35}=0$. Iš čia gauname $x=\frac{5+\sqrt{35}}{10}$. Nesunku patikrinti, kad skaičius $x+\sqrt{35}=\frac{5+11\sqrt{35}}{10}$ priklauso intervalui $(7,\,8)$, kuriame nėra sveikųjų skaičių. Vadinasi, skaičius $x=\frac{5+\sqrt{35}}{10}$ netenkina uždavinio sąlygos.

Ats.: $x=\pm 6-\sqrt{35}$.