Atranka į Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

Pirmoji diena, 2012 04 09

1. Duoti natūralieji skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$, kurie visi yra didesni už 4. Ant lentos užrašome 196 (nebūtinai skirtingas) sumas $a_n + a_m$, kur $1 \leqslant n, m \leqslant 14$. Tada kiekvienos sumos visus skaitmenis, išskyrus du paskutinius, nutriname. Ar gali būti taip, kad lentoje liks užrašytos visos įmanomos dviejų skaitmenų kombinacijos $00, 01, \ldots, 98, 99$?

2. Trikampis ABC yra smailusis. Taškai B_1 ir C_1 yra trikampio aukštinių, išvestų atitinkamai iš viršūnių B ir C, pagrindai. Duoti tokie taškai P ir Q, kad B_1 ir C_1 yra atitinkamai atkarpų BP ir CQ vidiniai taškai. Kampas PAQ yra statusis. Taškas F yra trikampio APQ aukštinės, išvestos iš viršūnės A, pagrindas. Įrodykite, kad kampas BFC yra statusis.

3. Teigiami skaičiai x, y, z tenkina lygybę $x + y^2 + z^3 = 1$. Įrodykite, kad
$$\frac{x}{2+xy} + \frac{y}{2+yz} + \frac{z}{2+zx} > \frac{1}{2}.$$

Antroji diena, 2012 04 10

4. Kiekvienam sveikajam skaičiui m didžiausią sveikojo skaičiaus kubą, neviršijantį m, pažymėkime $f(m)$. Pavyzdžiui, $f(26) = 8$ ir $f(27) = 27$. Duota natūraliųjų skaičių seka $a_1, a_2, a_3, \ldots$, kur $a_{n+1} = 3a_n - 2f(a_n)$ su kiekvienu $n \geqslant 1$.
   a) Raskite bent vieną pirmojo nario a_1 reikšmę intervale $[2012, 3000]$, kuriai egzistuoja toks skaičius M (priklausantis tik nuo a_1), kad $a_n \leqslant M$ kiekvienam $n \geqslant 1$.
   b) Raskite visas galimas natūraliąsias pirmojo nario a_1 reikšmes, kurioms egzistuoja toks skaičius M (priklausantis tik nuo a_1), kad $a_n \leqslant M$ kiekvienam $n \geqslant 1$.

5. Stačiakampio, kurio kraštinės 4 ir 5, viduje duoti šeši taškai. Įrodykite, kad atstumas tarp kažkurių dviejų taškų yra mažesnis už 3.

6. Natūraliųjų skaičių aibė padalyta į k nesikertančių poaibių $A_1, A_2, \ldots, A_k$ taip, kad koks bebūtų natūralusis skaičius $n \geqslant 15$, kiekviename iš tų k poaibių atsiras du skirtingi skaičiai, kurių suma lygi n.
   a) Įrodykite, kad natūraliųjų skaičių aibę galima padalyti į tris tokius poaibius.
   b) Įrodykite, kad natūraliųjų skaičių aibės negalima padalyti į k tokių poaibių, jei $k \geqslant 4$.