Mokinių matematikos olimpiados
rajono etapo užduočių 11 - 12 klasei sprendimai
2010 m.

1. Įsivaizduokime, kad keturi kampiniai ir centrinis langeliai nudažyti juodai, o likę keturi lentos langeliai – baltai. Bet kurie du gretimi langeliai yra skirtingų spalvų, todėl visi penki vabalai, pradžioje tupėję juoduose langeliuose, nuropojo į baltus langelius. Juoduose langeliuose galėjo atsidurti tik likę keturi vabalai. Kadangi juodų langelių yra penki, o juose atsidurti galėjusių vabalų – tik keturi, tai bent vienas juodas langelis liko laisvas.

2. Tegu Petriuko sugalvoti skaitmenys yra a, b ir c, o gautasis triženklis skaičius – $\overline{abc}$. Tuomet devyni triženkliai skaičiai yra $\overline{aa}$, $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{ba}$, $\overline{bb}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{cb}$, $\overline{cc}$ ir galioja lygybė $\overline{abc} = \frac{1}{3}(\overline{aa}+\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{ba}+\overline{bb}++\overline{bc}+\overline{ca}+\overline{cb}+\overline{cc}) = \frac{1}{3}(10a+a+10a+b+10a+c+10b+a+10b+b++10b+c+10c+a+10c+b+10c+c) = \frac{1}{3}\cdot 33(a+b+c) = 11(a+b+c)$. Taigi $100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c$, arba $89a = b + 10c = \overline{cb}$. $\overline{cb}$ yra dviženklis skaičius, todėl ir 89a yra dviženklis, o taip gali būti tik tada, kai $a = 1$. Tada $\overline{cb} = 89$. Gauname $c = 8$, $b = 9$, $\overline{abc} = 198$.

Ats.: 198.

3. Kiekvieną pirmosios lygties $2x + 3y = n$ sprendinį (x_0, y_0), kur $x_0 \geqslant 1$, atitinka antrosios lygties $2x + 3y = n + 1$ sprendinys $(x_1, y_1) = (x_0 - 1, y_0 + 1)$, kur $y_1 \geqslant 1$. Ir atvirkščiai: kiekvieną antrosios lygties $2x + 3y = n + 1$ sprendinį $(x_1, y_1) = (x_0 - 1, y_0 + 1)$, kur $y_1 \geqslant 1$, atitinka pirmosios lygties $2x + 3y = n$ sprendinys $(x_0, y_0) = (x_1 + 1, y_1 - 1)$, kur $x_0 \geqslant 1$. Taigi pirmoji lygtis turi tiek pat sprendinių (x_0, y_0), kur $x_0 \geqslant 1$, kiek antroji lygtis turi sprendinių (x_1, y_1), kur $y_1 \geqslant 1$. Pirmoji lygtis turi vieną papildomą sprendinį $(0, n/3)$, kai $3|n$, o antroji – vieną papildomą sprendinį $((n + 1)/2, 0)$, kai $2|n + 1$. Todėl pirmoji lygtis turės daugiau sprendinių nei antroji tada ir tik tada, kai pirmoji lygtis turės papildomą sprendinį, o antroji papildomo sprendinio neturės. Taip bus, kai $3|n$ ir $2 \nmid n + 1$, t.y. kai $3|n$ ir $2|n$ – tada ir tik tada, kai n yra 6 kartotinis.

Ats.: $n = 6k$, $k = 1, 2, \ldots$.

4. Įrodysime, kad įstrižainės BE ir CF eina per AD vidurio tašką. Tegu vienas šešiakampio kampas yra lygus α. Tada pagal daugiakampio kampų sumos formulę $6\alpha = (6 - 2)\pi$, taigi $\alpha = 2\pi/3$. Tiesių AB ir CD sankirtos tašką pažymėkime G. Tada

$\angle GBC = \pi - \angle ABC = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$; taip pat ir $\angle BCG = \pi/3$. Iš trikampio BCG kampų sumos turime $\angle BGC = \pi - \angle GBC - \angle BCG = \pi - \pi/3 - \pi/3 = \pi/3$. $\angle EDG + \angle DGB = 2\pi/3 + \pi/3 = \pi$, todėl tiesės AB ir ED lygiagrečios pagal vienašalius kampus EDG ir DGB. Kadangi $AB \| ED$ ir $AB = ED$, tai $ABDE$ - lygiagretainis, tad jo įstrižainės AD ir BE dalija viena kitą pusiau. Įrodėme, kad BE eina per AD vidurio tašką. Kad CF eina per AB vidurio tašką, įrodoma analogiškai.

5. Sudėję visas tris lygtis gauname $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 2y - 2z + 6 = 2x + 2y + 2z$, arba $(2x^2 - 4x + 2) + (2y^2 - 4y + 2) + (2z^2 - 4z + 2) = 0$. Padalykime lygybę iš 2 ir išskirkime pilnus kvadratus: $(x-1)^2 + (y - -1)^2 + (z-1)^2 = 0$. Lygybė galioja tik tada, kai $x = y = z = 1$. Šis sprendinys pradinę lygčių sistemą tenkina.

Ats.: $\{x = 1; y = 1; z = 1\}$.