Mokinių matematikos olimpiados
rajono etapo užduočių 9 - 10 klasei sprendimai
2010 m.

1. Jei berniukas turi dvigubai daugiau riešutų nei jo porininkė mergaitė, tai bendras poros riešutų skaičius lygus trigubam mergaitės surinktų riešutų skaičiui. Jei berniukas turi dvigubai mažiau riešutų nei jo porininkė mergaitė, tai bendras poros riešutų skaičius lygus trigubam berniuko surinktų riešutų skaičiui. Todėl kiekvienos poros turimų riešutų skaičius dalijasi iš 3. Tada ir visų vaikų turimų riešutų skaičius dalijasi iš 3 ir negali būti lygus 2009.

   Ats.: Negali.

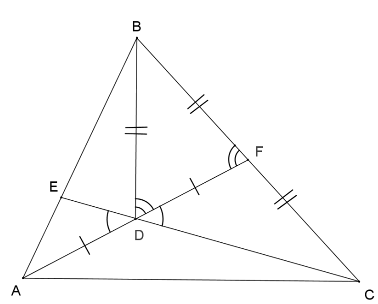
2. Tarkime, kad a yra toks skaičius, jog lygtys $x^3 + ax + 1 = 0$ ir $x^4 + ax^2 + 1 = 0$ turi bendrą šaknį x_0. Iš lygybės $x_0^4 + ax_0^2 + 1 = 0$ atėmę lygybę $x_0^3 + ax_0 + 1 = 0$, padaugintą iš x_0, gauname $1 - x_0 = 0$. Tada iš lygybės $x_0^3 + ax_0 + 1 = 0$, gauname $a = -2$. Patikrinę įsitikiname, kad su $a = -2$ pradinės lygtys turi bendrą šaknį $x = 1$.

   Ats.: $a = -2$.

3. Kadangi trikampis DBF lygiašonis, tai $\angle BDF = \angle BFD$. Tada

$$\angle CFD = \pi - \angle BFD = \pi - \angle BDF = \angle BDA.$$

   Todėl trikampiai CFD ir BDA lygūs (dvi kraštinės ir kampas tarp jų), ir $\angle FDC = \angle DAB$. Tada $\angle EDA = \angle FDC = \angle DAB = \angle DAE$. Vadinasi, trikampis AED lygiašonis, todėl $AE = ED$.



1 pav.

4. Ieškomą triženklį skaičių pažymėkime $\overline{abc}$. Triženklis skaičius negali prasidėti 0, todėl $a \geqslant 1$. Iš sąlygos išplaukia, kad $\overline{abc} = 12(a+b+c)$, $100a+10b+c = 12(a+b+c)$, $88a = 2b + 11c$. Kadangi $88a = 2b + 11c \leqslant 2 \cdot 9 + 11 \cdot 9 = 117$, tai $a = 1$. Dabar $2b = 88 - 11c = 11(8 - c)$, todėl skaičius $2b$ dalijasi iš 11. Vadinasi, $b = 0$, o tada $c = 8$. Taigi ieškomas triženklis skaičius yra 108.

   Ats.: 108.

5. Aišku, kad $[x] > 0$. Be to, $0 \leqslant \{x\} < 1$, todėl $[x] > [x] \cdot \{x\} \geqslant 3$. Vadinasi, $[x] \geqslant 4$. Dabar iš nelygybės $[x] \cdot \{x\} \geqslant 3$ išplaukia, kad $\{x\} \geqslant 3/4$. Taigi $x \geqslant 4,75$. Patikrinę įsitikiname, jog skaičius $4,75$ tenkina duotą nelygybę.

   Ats.: $x = 4,75$.