Lietuvos mokinių septintoji astronomijos olimpiada (2009)

Antro turo uždavinių sprendimai

X–XII klasių mokiniai

1 uždavinys

Išspręskite šiuos trumpus uždavinius:

1.1. Globulė (1,5 taško)

Tyrinėjant vieną žvaigždėdaros rajoną, esantį 1800 pc nuotolyje, buvo atrasta globulė (tamsus kompaktiškas tarpžvaigždinių dujų debesis), kurios skersmuo θ = 1,41 kampinių sekundžių. Tolimesni tyrimai parodė, kad dalelių koncentracija joje siekia $n = 10^8$ cm^{-3} ir kad ją sudaro daugiausia vandenilio molekulės. Apskaičiuokite globulės masę Saulės masės vienetais.

Sprendimas

Globulės linijinis skersmuo $d = (\theta \times r)/206265 = 0{,}012$ pc

Globulės masė $M = n \times 2m_{\mathrm{H}} \times V$

Čia V globulės tūris, $2m_{\mathrm{H}}$ vandenilio molekulės masė.

$V = 4/3 \times \pi \times (d/2)^3 = 4/3 \times 3{,}14 \times (0{,}012 \times 3{,}086 \times 10^{18}/2)^3 = 2{,}658 \times 10^{49}$ m^3

$M = 10^8 \times 2 \times 1{,}674 \times 10^{-27} \times 2{,}658 \times 10^{49} = 8{,}90 \times 10^{30}$ kg

$M = 4{,}5\ M_{\mathrm{S}}$

1.2. Žvaigždės amžius (1,5 taško)

Tyrinėjant senas žvaigždes, kuriose palyginus su Saule nustatytas nepaprastai mažas metalų kiekis, atrastas elementas toris, ^{232}Th. Tai radioaktyvus izotopas, kurio pusėjimo trukmė $\tau = 1{,}4\times10^{10}$ metų. Teoriniai tyrimai rodo, kad atitinkamose branduolinėse reakcijose kartu su radioaktyviuoju toriu susidaro ir stabilus elementas europis (Eu). Šių branduolinių reakcijų metu nusistovintis torio ir europio atomų koncentracijų santykis žvaigždės medžiagoje lygus
$N_{\mathrm{Th}}/N_{\mathrm{Eu}} = 2{,}904$.

Ištyrus žvaigždės HD 115444 spektrą nustatytas torio ir europio atomų koncentracijų santykis lygus 1,778. Tai reiškia, kad dalis radioaktyvaus torio suskilo per žvaigždės gyvavimo laikotarpį. Tardami, kad žvaigždės amžių lemia laikotarpis per kurį vyko radioaktyvaus torio skilimas, apskaičiuokite žvaigždės HD 115444 amžių.

Radioaktyvaus izotopo ^{232}Th koncentracijos kitimas priklausomai nuo laiko t ir pusėjimo trukmės τ aprašomas funkcija:

$N(t)=N(t_0) \times \exp(-0{,}693t / \tau)$

Čia $N(t)$ dabartinė torio koncentracija, $N(t_0)$ torio koncentracija pradiniame skilimo etape.

Sprendimas

$N(t) = N(t_0) \times \exp(-0{,}693t / \tau)$

Pertvarkome formulę $N(t_0) / N(t) = \exp(0{,}693t / \tau)$

$t = (\tau/0{,}693) \times \ln (N(t_0) / N(t))$

Akivaizdu, kad vietoje torio absoliučių koncentracijų galime įrašyti santykines koncentracijas europio atžvilgiu.

Pradinė santykinė torio koncentracija $[\, N_{\mathrm{Th}}/N_{\mathrm{Eu}}\,]_{\mathrm{p}} = 2{,}904$

Dabartinė santykinė torio koncentracija $[\, N_{\mathrm{Th}}/N_{\mathrm{Eu}}\,]_{\mathrm{d}} = 1{,}778$

$t = (1{,}4\times10^{10}/0{,}693)\times\ln (2{,}904 / 1{,}778) \approx 9{,}9\times10^{9}$ metų

1.3. Nova (1,5 taško)

Novos sprogimas įvyksta tada, kai dvinarėje žvaigždžių sistemoje ant baltosios nykštukės paviršiaus susikaupia pakankamai daug žvaigždinės medžiagos, pertekančios iš kitos komponentės, ir jai įkaitus staigiai prasideda vandenilio „degimo“ branduolinės reakcijos. Paprastai novos sprogimas įvyksta tada, kai ant baltosios nykštukės susikaupusios medžiagos kiekis pasiekia maždaug

10^{-6} Saulės masės. Apskaičiuokite, kiek laiko (metais) šviestų sužibusi nova, jei jos šviesis būtų lygus maždaug 30000 saulių šviesiui. Tarkite, kad žvaigždinę medžiagą sudaro vien tik vandenilis ir kad vienoje helio branduolio sintezės reakcijoje išlaisvinama energija lygi $1{,}1\times10^{-12}$ J.

Sprendimas

Visa energija, kuri bus išlaisvinta novos sprogimo metu, bus lygi

$E = (\Delta M/(4m_{\mathrm{H}}))\times\varepsilon$

Čia $\Delta M = 10^{-6} M_{\mathrm{S}} = 1{,}989\times10^{24}$ kg

$\varepsilon = 1{,}1\times10^{-12}$ J.

Novos švytėjimo trukmė lygi

$t = E / L_{\mathrm{N}}$

Čia $L_{\mathrm{N}} = 30000\, L_{\mathrm{S}}$

$t = (\Delta M/(4m_{\mathrm{H}}))\times\varepsilon / (30000\, L_{\mathrm{S}}) = (1{,}989\times10^{24} /(4\times1{,}67\times10^{-27}))\times 1{,}1\times10^{-12}/$

$(30000\times3{,}84\times10^{26}) = 2{,}84\times10^{7}$ s $= 0{,}9$ metų

1.4. Ryškiai (1,5 taško)

Stebėdamas pro 20 cm skersmens optinį teleskopą akimi olimpiados dalyvis vos įžiūrėjo galaktiką, kurios absoliutinis ryškis $-21{,}5$. Įvertinkite atstumą iki galaktikos.

Sprendimas

Tarkime, kad stebėtojo akies vyzdžio skersmuo $d_a \approx 5$ mm, o plika akimi jie matė objektus iki $m_a \approx 6$ ryškio.

$m_g - m_a = 5 \times \lg(D_t/D_a)$

Čia m_g galaktikos ryškis stebint pro teleskopą, m_a galaktikos ryškis stebint akimi, D_t-teleskopo skersmuo, D_a- akies vyzdžio skersmuo.

Nuostoliai teleskopo optikoje gali siekti apie 0,5 ryškio.

Ribinis ryškis galaktikos, kurią dar galėjo įžiūrėti olimpiados dalyvis, pro 20 cm teleskopą:

$m_g = m_a + 5 \times \lg(D_t/D_a) - 0{,}5 = 6 + 5 \times \lg(20/0.5) - 0{,}5 = 13{,}5$

Atstumo modulis:

$m_g - M_g = 5 \times \lg r - 5$

M_g – galaktikos absoliutinis ryškis, r – atstumas parsekais.

$$r = 10^{\frac{m_g - M_g + 5}{5}} = 10^{\frac{13{,}5 + 21{,}5 + 5}{5}} = 100\,\mathrm{Mpc}$$

2 uždavinys (3 taškai)

Naujai susidariusią karštą žvaigždę (T_{ef} = 39000 K ir $R = 12R_S$ (12 Saulės spindulių)) supa dulkių apvalkalas, kurio spindulys 0,02 pc. Apskaičiuokite apvalkalo dulkelės temperatūrą, tardami, kad dulkelės yra maži sferiški juodieji kūnai, kuriuos kaitina tik žvaigždės spinduliuotė.

Sprendimas

Žvaigždės šviesis lygus $L = 4\pi R^2\sigma T_e^4$.

Žvaigždės spinduliuotės srauto tankis apvalkalo nuotolyje $F_r = L / 4\pi r^2$.

Tarkime, kad dulkelės spindulys a. Dulkelės skerspjūvio plotas πa^2

Dulkelės sugeriamas energijos kiekis lygus $E = \pi a^2 F_r$

Dulkelė pati spinduliuoja kaip juodasis kūnas, kurio temperatūra T_d (ieškomoji temperatūra).

Pačios dulkelės spinduliavimo galia (šviesis) $L_d = 4\pi a^2\sigma T_d^4$.

Jei dulkelė yra šiluminėje pusiausvyroje su žvaigždės spinduliuote, tai $L_d = E$.

$4\pi a^2\sigma T_d^4 = \pi a^2\, 4\pi R^2\sigma T_e^4 / (4\pi r^2)$

$T_d = T_e\,(R/(2r))^{1/2}$

$T_d = 39000\times(12\times6{,}955\times10^8 /(2 \times 0{,}02 \times 3{,}086 \times 10^{18}))^{1/2} \approx 100$ K

3 uždavinys (3 taškai)

Diskinėje galaktikoje buvo aptiktas ūkas, kurio kampinis skersmuo 0,60 kampinių sekundžių. Po 3 metų ūko matmenys padidėjo iki 0,61 kampinių sekundžių. Buvo nustatyta, kad laboratorijoje gaunamą spektrinę liniją, kurios bangos ilgis λ_0 = 656,28 nm, ūke atitinka spektrinės linijos su įvairiais bangos ilgiais: nuo minimalaus λ_1=642,5nm iki maksimalaus λ_2 =668,75 nm. Apskaičiuokite, kokiu atstumu nuo Žemės yra ūkas, tardami, kad jis yra visomis kryptimis vienodai besiplečiantis burbulas.

Sprendimas

Ūko spektre ta pati linija turi įvairius bangos ilgius, nes ūko centro atžvilgiu (kurio greitis mūsų atžvilgiu v_0), dalis jo artėja link mūsų (artimiausios srities greitis mūsų atžvilgiu v_1), dalis - tolsta (tolimiausios srities greitis mūsų atžvilgiu v_2).

Ūko plėtimosi (spindulio didėjimo) greitis:

$v = (v_2 - v_1) / 2$, nes $v_1 = v_0 - v$ ir $v_2 = v_0 + v$

Išreiškus greitį per raudonąjį poslinkį (kur c - šviesos greitis):

$v = [(\lambda_2 - \lambda_0)/\lambda_0 - (\lambda_1 - \lambda_0)/\lambda_0] \times c \ / 2 = c \times (\lambda_2 - \lambda_1)/(2 \times \lambda_0) =$

$= c \times (668{,}75 - 642{,}5)/(2 \times 656{,}28) \approx 0{,}02 \times c$

Ūko spindulio pokytis per 3 metus šviesmečiais:

$\mathrm{d}R = v \times 3$ metai $= c \times 0{,}02 \times 3 \approx 0.06$ ly

Ūko spindulio pokytis per 3 metus kampinėmis sekundėmis:

$\mathrm{d}R = (0{,}61 - 0{,}60) / 2 = 0{,}005''$

Nuotolį apskaičiuojame pritaikydami mažų kampų trikampio formulę:

$r = 206265 \times 0.06 / 0.005 = 2475180$ ly ≈ 760 kpc

Viename radiane yra 260265 kampinių sekundžių.

4 uždavinys (6 taškai)

Paukščių Tako centre astronomai jau seniai aptiko galingą radijo bangų šaltinį, kurį pavadino SgrA*. Tačiau regimojoje spektro srityje joks objektas ten nestebimas. Prieš keletą metų astronomams pavyko užregistruoti, kaip aplink šį paslaptingą objektą skrieja žvaigždė S2, kurios judėjimas paklūsta Keplerio dėsniams.

1 lentelėje pateiktos šios žvaigždės padėtys skirtingais laiko momentais. SgrA* koordinatės: x=0″, y=0″. Tiesė, jungianti Žemę ir žvaigždę S2 yra statmena žvaigždės orbitos plokštumai. Atstumas iki Galaktikos centro yra 8 kpc.

1. Naudodamiesi pateiktomis priemonėmis, nustatykite apytikslius žvaigždės S2 orbitos elementus: didįjį pusašį, ekscentricitetą ir periodą metais.

2. Skaičiavimais įrodykite arba paneikite hipotezę, kad SgrA* yra kompaktiškas žvaigždžių spiečius. Didžiausias žinomas tankis spiečiuose yra apie 1000 žvaigždžių kubiniame parseke.

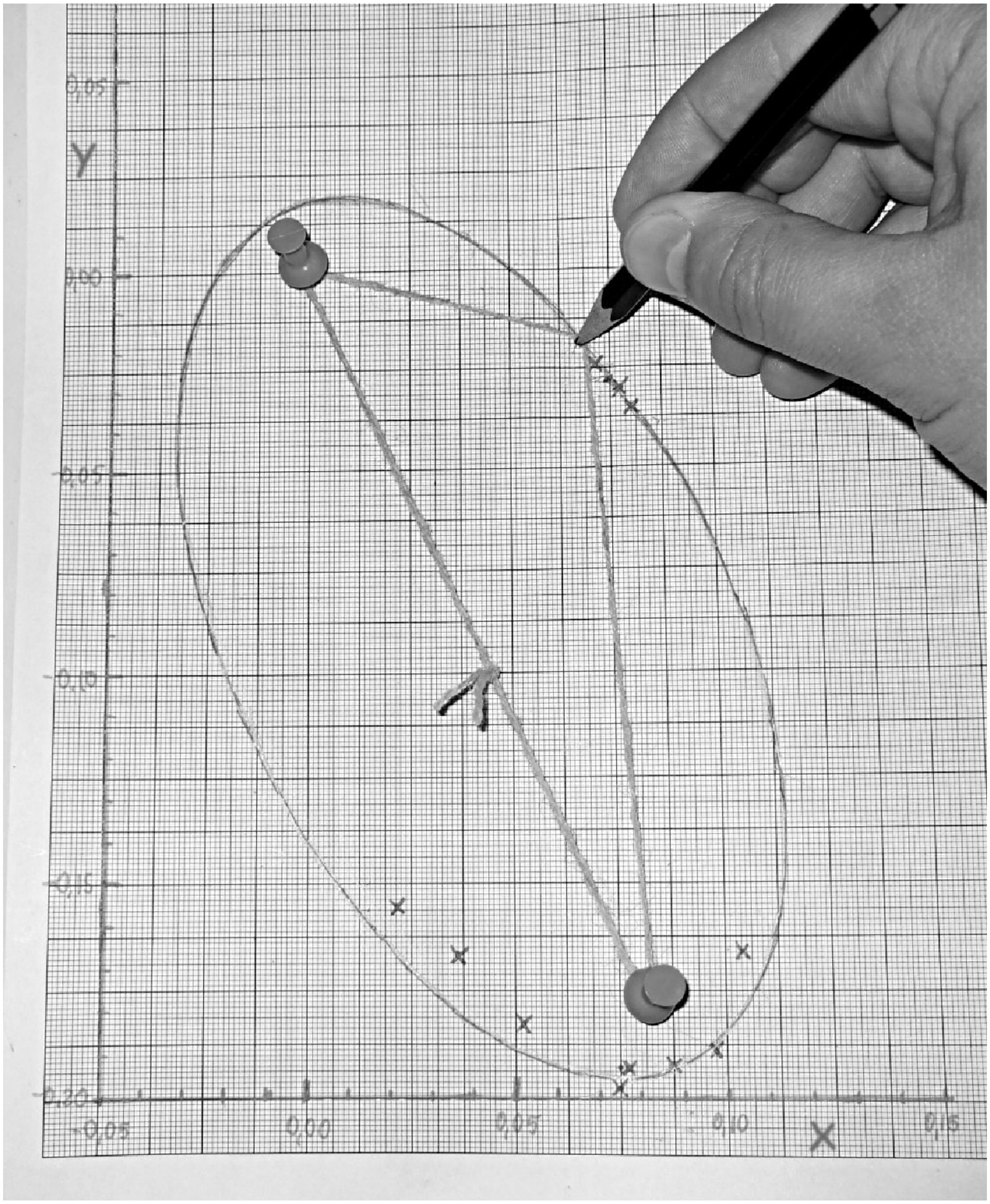
Priemonės: popierius langeliais, liniuotė, smeigtukai, siūlas, kartono gabalas.

1 lentelė. Žvaigždės S2 padėties kitimas

Data (metai)	x (″)	y (″)
1992,226	0,104	–0,166
1994,321	0,097	–0,189
1995,531	0,087	–0,192
1996,256	0,075	–0,197
1996,428	0,077	–0,193
1997,543	0,052	–0,183
1998,365	0,036	–0,167
1999,465	0,022	–0,156
2003,214	0,072	–0,024
2003,353	0,077	–0,030
2003,454	0,081	–0,036

Sprendimas

1. Ant milimetrinio popieriaus nubrėžiame x ir y ašis. Pažymime Galaktikos centre esančio objekto padėtį ir pagal lentelėje duotas koordinates atidedame žvaigždės S2 padėtis skirtingais laiko momentais. Žvaigždės S2 orbita yra elipsė, kurios vienas židinys yra taške x=0″, y=0″. Braižydami elipsę, pasinaudosime tuo, kad atstumų suma nuo bet kurio elipsės taško iki vieno ir iki kito židinio yra konstanta. Vieną smeigtuką įsmeigiame židinyje x=0, y=0, antrą – kitame židinyje (apytikslę jo padėtį įvertiname pagal žvaigždės S2 padėtis žyminčių taškų išsidėstymą). Iš siūlo padarome kilpą, kurią užmauname ant smeigtukų. Rašymo priemonės smaigaliu įtempiame siūlą, ir, jo neatlaisvindami, aplink smeigtukus brėžiame elipsę. Siūlo kilpos dydį reikia parinkti taip, kad brėžiama elipsė kuo mažiau nukryptų nuo daugumos taškų, žyminčių apytiksles S2 padėtis.



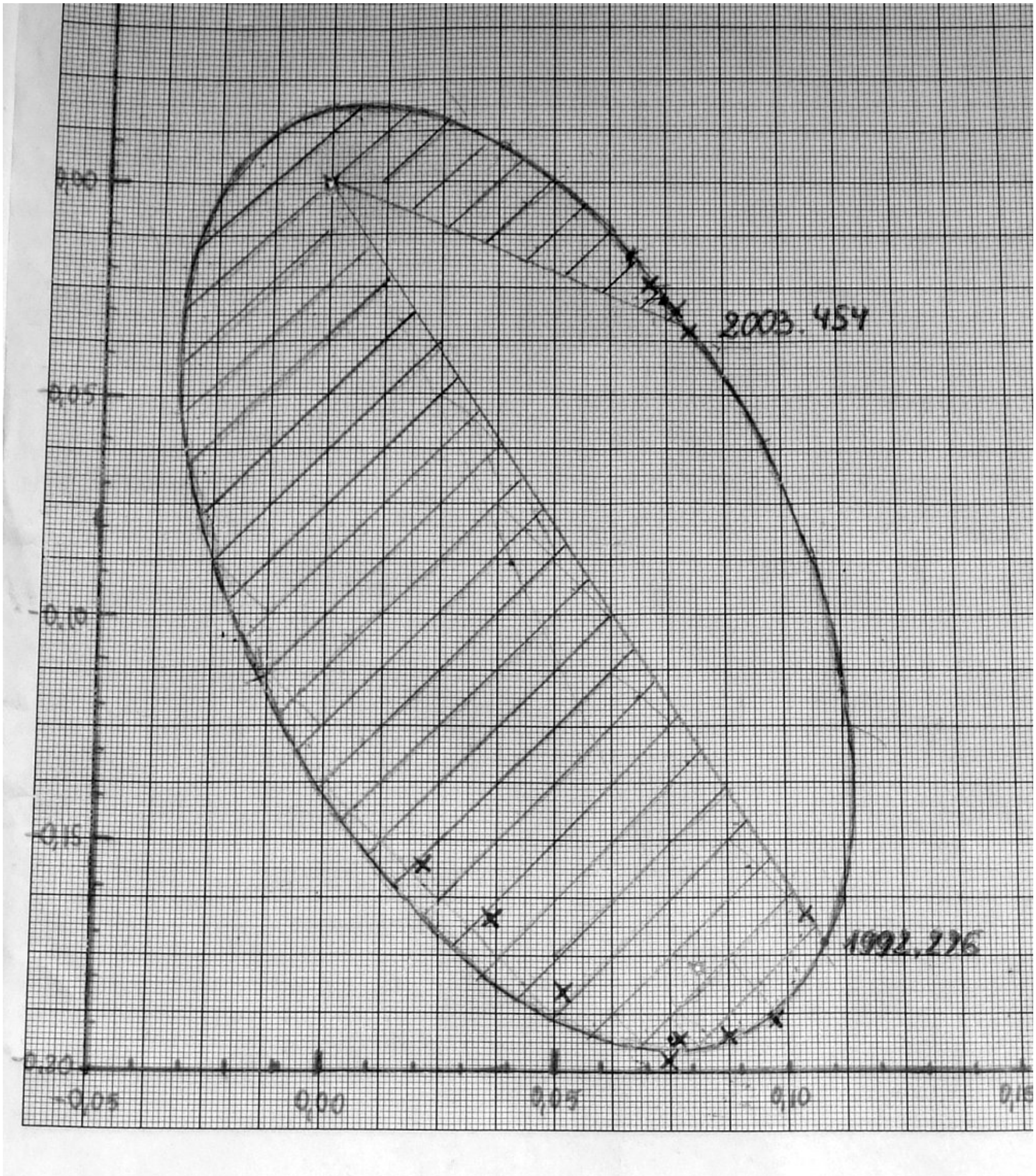
1 pav. Elipsės brėžimas.

Didžiojo pusašio, ekscentriciteto ir periodo skaičiavimas.

Parsekas yra atstumas, iš kurio Žemes orbitos didysis pusašis (1AU) matomas 1" kampu. Tada 8 kpc nuotolyje 1" atitiks 8000 AU. 1 pav. 1" atitinka 800 mm, taigi 1 mm = 10 AU.

Iš 1 pav. didysis pusašis *a* ≈91 mm = 910 AU, mažasis pusašis b≈49 mm = 490 AU.

Ekscentricitetas $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ =0,84



2 pav. Periodas skaičiuojamas remiantis 2 Keplerio dėsniu. Plotas ΔA - užbrūkšniuotas.

Elipsės spindulys vektorius (jis jungia židinį ir žvaigždę) per lygius laiko intervalus nubrėžia lygius plotus (2 Keplerio dėsnis):

$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta A}{A}$, kur ΔP ir P yra laiko intervalai, o ΔA ir A – atitinkami plotai.

Tarkime, kad P yra žvaigždės S2 periodas, A – elipsės plotas.

Per laiko intervalą ΔP spindulys vektorius nubrėš plotą ΔA (2 pav.). Skaičiavimų rezultatas bus tuo tikslesnis, kuo didesnis ΔP. Imame ΔP intervalą nuo t_1=1992,226 iki t_2=2003,454.

$\Delta P = t_2 - t_1 = 11{,}228$ m.

Plotą ΔA galime sužinoti, suskaičiavę, kokį plotą milimetrinio popieriaus lape nubrėžia spindulys vektorius per laiko intervalą ΔP (2 pav.). Suskaičiavę kvadratėlius, gauname $\Delta A \approx 97{,}6\ \text{cm}^2$.

Elipsės plotą A apskaičiuojame liniuote išmatavę pusašių a ir b ilgius: $A = \pi ab = 140{,}1\ \text{cm}^2$.

Periodas $P = \frac{\Delta P}{\Delta A} A = \frac{11{,}228}{97{,}6} \cdot 140{,}1 = 16{,}1$ metų.

2. Tarkime, kad objektas užima rutulio formos tūrį, kurio spindulys yra lygus nuotoliui nuo židinio iki perigalakčio. Iš 1 pav. šio rutulio spindulys $R \approx 13$ mm=13×10 AU =130 AU $= 6.3 \times 10^{-4}$ pc. (Palyginimui – Plutono afelis yra beveik už 50 AU nuo Saulės).

Rutulio tūris bus $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 10^{-9}$ pc

Žvaigždžių tankis rutulyje $\rho = \frac{m}{V}$

Objekto masę m rasime pasinaudoję 3 Keplerio dėsniu:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$, čia $m_1 + m_2$ yra atitinkamai objekto ir žvaigždės S2 masės,

G – gravitacijos konstanta.

$$(m_1 + m_2) = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} = 5{,}8 \cdot 10^{36}\ \text{kg} = 2{,}9 \cdot 10^6 M_{Saules} .$$

Kadangi $m_1 + m_2 >> m_2$ (t.y. už žvaigždės masę), galima laikyti, kad objekto masė $m = 2{,}9 \cdot 10^6 M_{Saules}$.

Žvaigždžių tankis rutulyje $\rho = m_1 / V = 2{,}9 \cdot 10^{15}$ (žvaigždžių/pc^3).

Tai apie 10^{12} kartų daugiau nei didžiausias vidutinis tankis žinomuose kamuoliniuose žvaigždžių spiečiuose. Išvada: SgrA* negali būti žvaigždžių spiečius.