Lietuvos mokinių aštuntoji astronomijos olimpiada (2010)

Antro turo uždavinių sprendimai

X – XII klasių mokiniai

<u>1 uždavinys</u> (viso 8 taškai)

a) Saulės vėjas (2 taškai)

Saulė visomis kryptimis nuolat skleidžia elektringų dalelių srautą, vadinamą Saulės vėju. Dėl to Saulė kasmet netenka tam tikros savo masės dalies. Apskaičiuokite, kokią masės dalį kasmet praranda Saulė, jei Saulės vėjo dalelių srautas prie Žemės yra lygus $4\ 10^8$ dalelių $cm^{-2}\ s^{-1}$. Laikykite, kad Saulė sudaryta vien tik iš vandenilio.

Sprendimas

Saulės vėjo dalelių srautas turi būti elektriškai neutralus. Todėl vieną pusę dalelių srauto turi sudaryti protonai, o kitą pusę – elektronai. Kadangi elektrono masė yra žymiai mažesnė už protono masę, tai jų masės indėlio galime nepaisyti. Taigi, Saulės vėjo protonų srautas lygus $2\ 10^8$ dalelių $cm^{-2}\ s^{-1}$. Saulės masės dalis, kurios netenka Saulė per metus, bus lygi

$$M_{vejas} = \frac{4\pi r^2 n_p m_p}{M_\odot} t$$

Čia r – vidutinis atstumas iki Saulės, n_p – Saulės vėjo protonų srautas, m_p – protono masė, t – metų trukmė sekundėmis, $M_\odot$ – Saulės masė.

$$M_{vejas} = \frac{4\pi \left(1{,}496\cdot 10^{11}\right)^2 2\cdot 10^8 \cdot 10^4 \cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 3{,}16\cdot 10^7}{1{,}989\cdot 10^{30}} = 1{,}5\cdot 10^{-14}$$

<u>*Atsakymas*</u> $1{,}5\ 10^{-14}$.

b) Pagrindinės sekos raidos etapo trukmė (2 taškai)

Žvaigždės evoliucijos pagrindinės sekos stadijoje trukmė T_{PS} yra proporcinga jos masės M ir šviesio L santykiui, o $L \sim M^{4,5}$. Apskaičiuokite pagrindinės sekos žvaigždės masę ir evoliucijos trukmę, jei jos regimasis ryškis V=8,8 mag ir paralaksas p=0,01″? Žinome, kad Saulės evoliucijos trukmė pagrindinėje sekoje T_{PS} = 10 milijardų metų, o žvaigždės masė ir šviesis pagrindinės sekos evoliucijos stadijoje nesikeičia .

Sprendimas

Žvaigždės šviesį L išreiškus Saulės šviesiais, o masę M Saulės masėmis:

$$M = L^{1/4,5}$$

Pagrindinės sekoje (PS) žvaigždės praleidžiamas laikas T_{PS} yra proporcingas jos masės ir šviesio santykiui (M/L). Vadinasi žvaigždės T_{PS} (milijardais metų), atsižvelgus į tai, kad Saulės masės žvaigždė PS etape praleidžia 10 milijardų metų, yra:

$$T_{PS} = 10\frac{M}{L} = 10\frac{L^{1/4,5}}{L} = 10 \cdot L^{(1/4,5-1)} \qquad (1)$$

Jei žvaigždės L yra išreikštas Saulės šviesiais, tai jos absoliutinio ryškio M_V ir Saulės absoliutinių ryškio (4,8) skirtumas:

$$M_V - 4,8 = -2,5 \cdot \lg(L) \qquad (2)$$

Formulėje $m - M_V = 5 \cdot \lg r - 5$ nuotolį parsekais pakeitę paralaksu $r = 1/p$ ir įstatę duotas vertes ir surandame žvaigždės absoliutinį ryškį:

$$M_V = 8,8 - 5 \cdot \lg(1/0,01) + 5 = 8,8 - 10 + 5 = 3,8$$

Kurį įstatę į (2) surandame žvaigždės šviesį (Saulės šviesiais):

$$\lg(L) = (3,8 - 4,8)/(-2.5) = 0,4$$

$$L = 10^{0,4}$$

Gautą L vertę įstatome į (1) , randame T_{PS}:

$$T_{PS} = 10 \cdot L^{(1/4,5-1)} = 10 \cdot 10^{0,4 \cdot (1/4,5-1)} \approx 10^{0,69} \approx 4,9 \text{ milijardai metų}$$

Žvaigždės masė: $M = 10^{0,4/4,5} \approx 1,23$ Saulės masių

Atsakymas: Žvaigždės evoliucijos trukmė pagrindinėje sekoje: 4,9 milijardai metų. Žvaigždės masė: 1,2 Saulės masės.

c) Medžiagos pertekėjimo sparta (2 taškai)

Rentgeno pulsaras yra tokia dvinarė žvaigždė, kurioje medžiaga iš normalios žvaigždės perteka į neutroninę žvaigždę veikiant jos gravitacijos jėgai. Tokios neutroninės žvaigždės šviesį nulemia medžiagos pertekėjimo sparta. Apskaičiuokite, kokia medžiagos pertekėjimo sparta (skaičiuojant Saulės masėmis per metus) į neutroninę žvaigždę, kurios šviesis lygus $L = 2\times10^{30}$ W. Neutroninės žvaigždės masė lygi 1,5 Saulės masės, o jos spindulys R = 10 km. Laikykite, kad visa į neutroninę žvaigždę pertekančios medžiagos kinetinė energija virsta spinduliavimo energija.

Sprendimas

Tarkime, kad medžiagos masė, įkrentanti į neutroninę žvaigždę per 1 sekundę, lygi m_1.
Šios masės potencinės energijos absoliuti vertė neutroninės žvaigždės atžvilgiu lygi

$$E_p = m_1 g R$$

Čia g – sunkio jėgos pagreitis neutroninės žvaigždės paviršiuje, o R – jos spindulys.
Sunkio jėgos pagreitis lygus

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

Čia M – neutroninės žvaigždės masė, G – gravitacijos konstanta.
Įstatę šią g išraišką į potencinės energijos formulę gauname

$$E_p = m_1 G\frac{M}{R}$$

Ties neutroninės žvaigždės paviršiumi visa potencinė energija virsta kinetine energija (energijos tvermės dėsnis). Pagal uždavinio sąlygą visa kinetinė energija virsta spinduliuote. Taigi,

$$L = \left|E_p\right|$$

$$m_1 = \frac{LR}{GM}$$

Per metus į žvaigždę įkrentanti medžiagos masė bus lygi

$$\mathcal{M} = m_1 t = \frac{LR}{GM}t$$

$$\mathcal{M} = \frac{2\cdot10^{30}\cdot10^{4}}{6,67\cdot10^{-11}\cdot1,5\cdot1,99\cdot10^{30}}3,16\cdot10^{7} = 3,17\cdot10^{21}\,\mathrm{kg}$$

$$\mathcal{M} = 1,6\cdot10^{-9}\,M_\odot$$

<u>Atsakymas:</u> Masės netekimo sparta: $1,6\cdot10^{-9}$ Saulės masės per metus.

d) Miestas iš Mėnulio (2 taškai)

Teigiama, kad įprastinį gatvės apšvietimo žibintą naktį plika akimi galima pamatyti iš 20 km atstumo. Ar astronautas, būdamas Mėnulyje, galėtų plika akimi pamatyti Žemės naktinį miestą, jei tame mieste degtų milijonas gatvės žibintų? Kokios galimybės pamatyti tokio miesto šviesas su 30 cm teleskopu? Atsakymus pagrįskite skaičiavimais. Mėnulio nuotolis nuo Žemės lygus 384000 km, o akies vyzdžio skersmuo 6 mm.

Sprendimas

Žinome, kad šviesos šaltinio spindesys silpnėja proporcingai nuotolio nuo jo kvadratui. Apskaičiuojame, kiek kartų susilpnėtų žibinto spindesys, jei jį iš 20 km nuotolio nukeltume į Mėnulio nuotolį.

$$\frac{J_1}{J_{1M}} = \left(\frac{r_M}{r_a}\right)^2 = \left(\frac{384000}{20}\right)^2 = 368640000 = 369 \times 10^6 \text{ kartų}$$

Čia J_1 – vieno gatvės žibinto, esančio nuotolyje r_a=20 km, spindesys, o J_{1M} – vieno gatvės žibinto, esančio Mėnulio nuotolyje r_M=384000 km, spindesys.
Taigi, iš Mėnulio astronautas galėtų pastebėti miestą Žemėje, jei jame degtų ne mažiau kaip 369· milijonai žibintų. Vadinasi, miesto su milijonu žibintų astronautas nematytų.

Su teleskopu matysime tiek kartų mažesnio spindesio šviesulius, kiek kartų teleskopo objektyvo plotas didesnis už akies vyzdžio plotą. Kadangi teleskopų objektyvai dažniausiai būna apvalūs, tai jų plotai proporcingi skersmens kvadratui. Iš čia išplaukia, kad didžiausias nuotolis, iš kurio dar galima būtų pamatyti gatvės žibintą su duotu teleskopu, bus lygus

$$r_t = r_a \frac{D_t}{D_a} = 20\frac{300}{6} = 1000\,\text{km}$$

Čia D_a yra akies vyzdžio skersmuo, o D_t teleskopo objektyvo skersmuo.

Apskaičiuojame, kiek kartų būtų sumažėjęs pro teleskopą stebimo vieno žibinto spindesys Mėnulyje

$$\frac{J_{1t}}{J_{1M}} = \left(\frac{r_M}{r_t}\right)^2 = \left(\frac{384000}{1000}\right)^2 \approx 147000$$

Taigi, iš Mėnulio žvalgydami Žemę su duotu teleskopu pastebėsime miestus, kuriuose dega ne mažiau kaip 147 tūkstančiai žibintų. Vadinasi, miestą su milijonu žibintų tikrai astronautas pamatys.

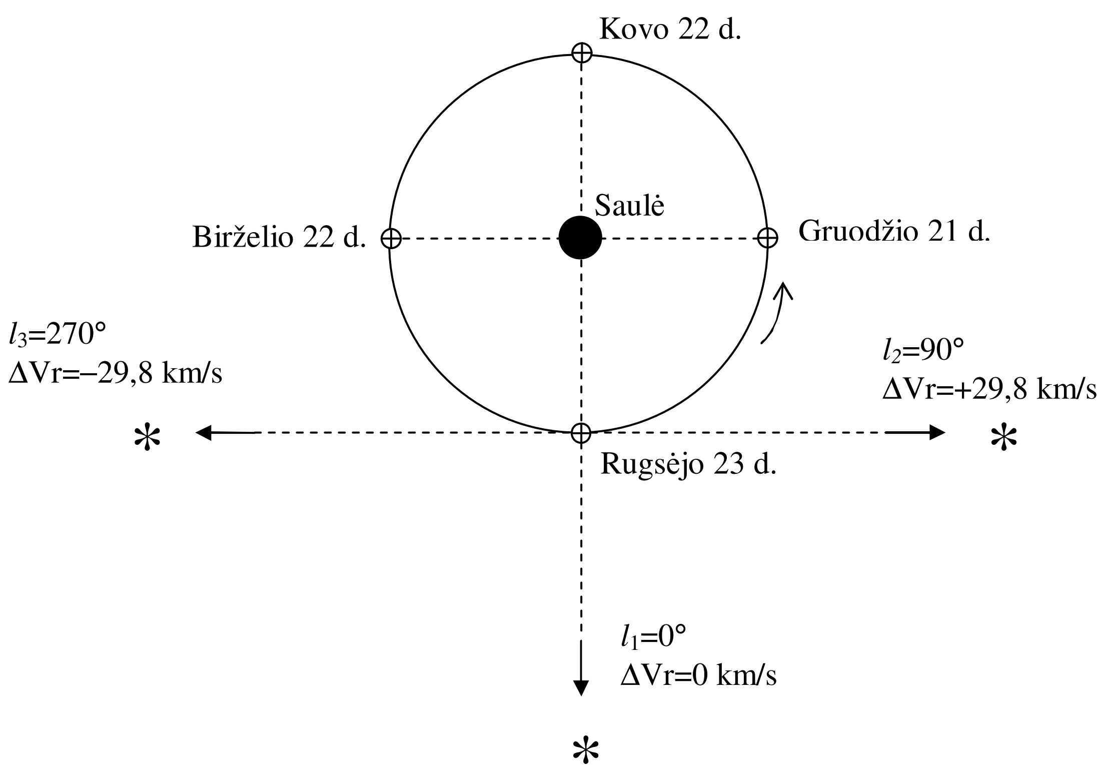
<u>Atsakymas:</u> Astronautas, būdamas Mėnulyje, plika akimi nematys Žemės naktinio miesto, jei jame degtų tik milijonas gatvės žibintų. Tačiau su 30 cm teleskopu astronautas tikrai pamatys tokį miestą Žemėje.

2 uždavinys (3 taškai)

Praėjusių metų rugsėjo 23 dienos naktį astronomas užregistravo trijų žvaigždžių, matomų ekliptikos plokštumoje, spektrus. Šių žvaigždžių ekliptinės ilgumos yra l_1= 0°, l_2=90° ir l_3=270°. Išmatavus vandenilio Balmerio serijos Hα linijos bangos ilgius šių žvaigždžių spektruose buvo gauti tokie rezultatai: λ_1= 656,325 nm, λ_2=656,300 nm ir λ_3=656,265 nm. (nejudančio šaltinio Hα linijos bangos ilgis λ_0=656,285 nm). Kuri iš šių žvaigždžių greičiausiai tolsta nuo Saulės?

Laikykite, kad Žemė aplink Saulę skrieja apskritimu ir kad Žemės sukimasis apie savo ašį neturi įtakos skaičiavimams. Primename, kad ekliptinė ilguma yra atskaitoma nuo pavasario lygiadienio taško ta pačia kryptimi, kaip ir rektascensija.

Sprendimas



1 pav. Saulės, Žemės ir žvaigždžių tarpusavio padėtys.

Rugsėjo 23 d, praėjus pusei metų nuo pavasario lygiadienio momento, Saulės ekliptinė ilguma yra 180°. Žvaigždė, kurios ilguma 0°, yra vienoje tiesėje jungiančioje Saulę, Žemę ir žvaigždę. Todėl stebėjimų metu atstumas tarp Saulės ir Žemės nekinta, o pataisa dėl Žemės skriejimo orbita yra lygi $\Delta V_{ž1}$= 0 km/s. Žvaigždės, kurių ilgumos yra 90° ir 270°, praktiškai yra orbitos liestinėje, išvestoje per Žemės padėties tašką. Pirmuoju atveju Žemė orbitiniu greičiu, $V_{ž0}$, artėja link žvaigždės, todėl žvaigždės greitį reikia Saulės atžvilgiu padidinti dydžiu $\Delta V_{ž2}=V_{ž0}$, o antruoju – tolsta, $\Delta V_{ž3}=-V_{ž0}$.
$V_{ž0}$ apskaičiuojamas padalijus kelią, kurį nuskrieja Žemė orbita apie Saulę, iš apskriejimo laiko: $V_{ž0}$= 2×3,14×149600000/365,25×24×3600= 29,8 km/s.

Doplerinis linijos poslinkis dėl Žemės judėjimo:
$\Delta\lambda = \lambda_0 \times Vr/c$=656,285×29,8/299800=0,065 nm.
Tuomet pirmosios žvaigždės $\Delta\lambda_1$= (656,325−656,285) −0=0,040 nm.
Antrosios - $\Delta\lambda_2$= (656,300−656,285)+0,065=0,080 nm.
Trečiosios - $\Delta\lambda_3$=(656,265−656,285) −0,065= −0,085 nm.

Atsakymas
Greičiausiai nuo Saulės tolsta antroji žvaigždė, nes jos Δλ yra didžiausias.

Kitas sprendimo būdas. Galima skaičiuoti kiekvienos žvaigždės greičius, jeigu nepastebėjote, kad išvadai padaryti pilnai užtenka ir Δλ verčių.

1. $V_{r1}= ((\lambda_1-\lambda_0)/\lambda_0)\times c$ = ((656,325−656,285)/ 656,285)×299800= 18,3 km/s.

   $V_1= V_{r1}+ V_{ž1}$=18,3+0= 18,3 km/s

2. $V_{r2}= ((\lambda_2-\lambda_0)/\lambda_0)\times c$ = ((656,300−656,285)/ 656,285)×299800= 6,8 km/s

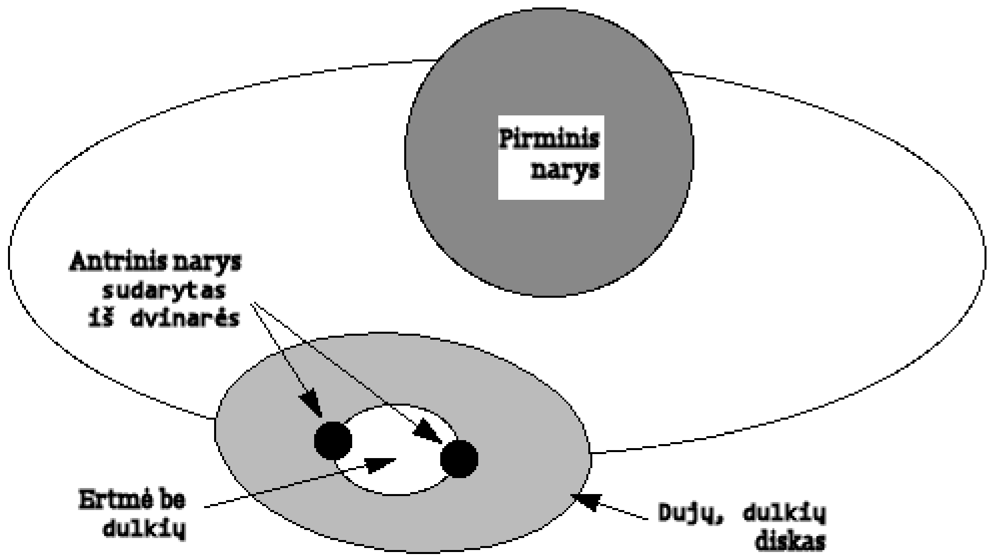
   $V_2= V_{r2}+ V_{ž2}$=6,8+29,8= 36,6 km/s

3. $V_{r3}= ((\lambda_3-\lambda_0)/\lambda_0)\times c$ = ((656,265−656,285)/ 656,285 }×299800= −9,1 km/s
   $V_3= V_{r3}+ V_{ž3}$=−9,1−29,8= −38,9 km/s

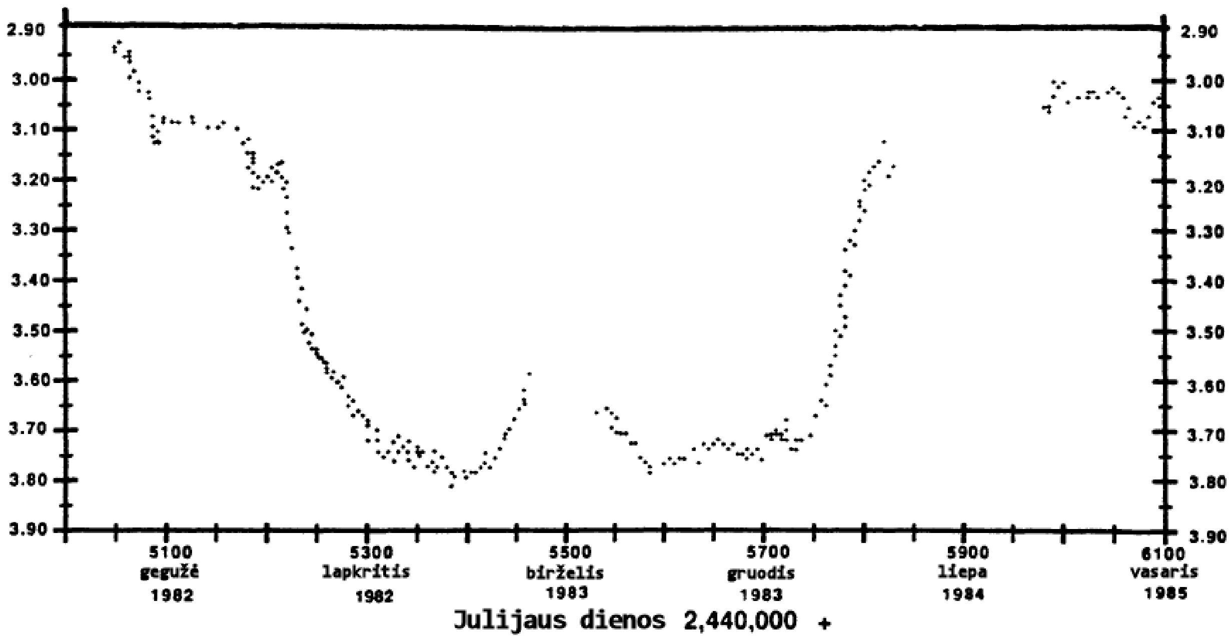
Atsakymas: Greičiausiai nuo Saulės tolsta 2-oji žvaigždė.

<u>3 uždavinys</u> (5 taškai)

Vežėjo Epsilon (ε Aur) (V=3mag) yra užtemdomoji dvinarė sistema, sudaryta iš F0 supermilžinės (pirminis narys) ir antrinio nario, sudaryto iš glaudžiosios dvinarės, kurią supa dulkių diskas (Žr. žemiau pateiktą pav.)



Iš fotometrinės klasifikacijos nustatyta, kad pirminio nario laisvojo kritimo pagreitis žvaigždės paviršiuje lygus 0,03 m/s^2, o žvaigždės spindulys lygus R=2,5·10^{11}m. Iš radialinių greičių matavimų pastebėta, kad pirminio ir antrinio nario radialinių greičių maksimalių verčių santykis lygus 0,93. Šios sistemos užtemdymo periodas 27,1 metų. Iš žemiau pateiktų 1982-1984m. fotometrinių duomenų (1 pav.) nustatykite antrinio nario (glaudžios dvinarės + disko) masę, orbitos didįjį pusašį, dulkių disko skersmenį bei šiame diske esančios ertmės skersmenį. Laikykite, kad dvinarės sistemos orbita yra apskritimas.



1 pav. ε Aur spindesio kitimo kreivė gauta per 1982-1984m. užtemdymą

Sprendimas

Pirmiausia apskaičiuosime pirminio nario masę.
Iš gravitacinės jėgos išraiškos surandame, kam bus lygus gravitacijos pagreitis žvaigždės paviršiuje:

$$m_0 g = G\frac{Mm_0}{R^2}$$

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Čia G – gravitacijos konstanta, M – žvaigždės masė ir R – žvaigždės spindulys.
Iš čia suskaičiuojame masę Saulės masėmis M_S:

$$M = \frac{gR^2}{G} = \frac{0,03 \cdot 2,5 \cdot 2,5 \cdot 10^{22}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 0,28 \cdot 10^{32}\,\text{kg} = \frac{0,28 \cdot 10^{32}}{1,989 \cdot 10^{30}} = 14M_S$$

Kiekvienai dvinarei sistemai galioja pusiausvyros sąlyga. Šiuo atveju

$$M \cdot r_1 = m \cdot r_2$$

Čia M ir m atitinkamai pirmos ir antros komponenčių masės, o r jų spinduliai vektoriai. Kadangi pagal uždavinio sąlygą orbitos yra apskritimai, tai r atitinkamai yra pirmos ir antros komponenčių orbitų spinduliai. Kiekvienos komponentės linijinis orbitinis greitis bus lygus:

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{P}; \quad v_2 = \frac{2\pi r_2}{P}$$

Čia apskaičiuotieji greičiai ir yra atitinkamų komponenčių maksimalieji radialiniai greičiai. Iš jų randame orbitų spindulius:

$$r_1 = \frac{v_1 P}{2\pi}; \quad r_2 = \frac{v_2 P}{2\pi}$$

Tada dvinarės sistemos pusiausvyros sąlyga bus tokia:

$$M\frac{v_1 P}{2\pi} = m\frac{v_2 P}{2\pi}$$

arba

$$\frac{M}{m} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{0,93}$$

Iš čia glaudžios dvinarės ir disko masė

$$m = 0,93M = 13M_S$$

Dabar apskaičiuosime vidutinį atstumą.
Judant apskritimu, išcentrinis pagreitis turi būti lygus gravitaciniam pagreičiui:

$$a_{ic} = \frac{v^2}{r} = g = G\frac{M+m}{r^2}$$

Čia v - orbitinis greitis, r – orbitos spindulys, m – antrinio nario masė.
Greitis judant apskritimu bus lygus:

$$v = \frac{l}{t} = \frac{2\pi r}{P}$$

Čia l - apskritimo ilgis, P - periodas.
Įstačius į ankstesnę formulę gauname:

$$\frac{4\pi^2 r}{P^2} = G\frac{M+m}{r^2}$$

Iš čia surandame orbitos spindulį:

$$r=\sqrt[3]{\frac{G}{4\pi^2}\cdot(M+m)\cdot P^2}=\sqrt[3]{\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot27\cdot1,989\cdot10^{30}\cdot(27,1\cdot365,25\cdot24\cdot60\cdot60)^2}{4\cdot3,1415\cdot3,1415}}=$$

$$=4\cdot10^{12}\,\text{m}=\frac{4\cdot10^{12}}{1,49\cdot10^{11}}=27\text{ AU}$$

Disko skersmenį surasime iš pateikto grafiko. Išmatuojame, kada prasideda ir baigiasi užtemdymas.

$$\Delta t_d=6100-5100=1000d.$$

Per tą laiką diskas orbitoje pasislinks kampu:

$$\varphi=\frac{2\pi}{P}\Delta t_d$$

Apskaičiuojame disko skersmenį:

$$l_d=\varphi\cdot r=\frac{2\pi}{P}\Delta t_d\cdot r=\frac{2\cdot3,1415\cdot1000\cdot27}{27,1\cdot365,25}=17\text{ AU}$$

Skylės skersmuo bus:

$$l_S=\frac{\Delta t_S}{\Delta t_d}\cdot l_d=\frac{(5600-5400)}{1000}\cdot17=3,4\text{ AU}$$

<u>Atsakymas</u>: Antrinio komponento masė 13 Saulės masių
Orbitos spindulys 27AU
Disko skersmuo 17AU
Skylės skersmuo 3AU

4. Tamsioji medžiaga (4 taškai)

Tarkime, kad galaktikų spiečių, kuris danguje užima ~5° skersmens skritulio plotą, sudaro 10 000 vienodų 18 regimojo ryškio galaktikų, susidedančių iš vien tik į Saulę panašių žvaigždžių. Kokią šio spiečiaus masės dalį sudaro tamsioji medžiaga, jei spiečiaus pakraštyje esančių galaktikų radialiniai greičiai nuo vidutinio spiečiaus greičio skiriasi ~500 km/s, o spiečiaus raudonasis poslinkis lygus 0,1?

Sprendimas:

Iš Hablio dėsnio, nuotolis iki spiečiaus (c= 300000 km/s, H = 71 km/s/Mpc)

$$d = c \cdot z / H \approx 422 \text{ Mpc}$$

Spiečiaus kampinis spindulys $\alpha = 2{,}5°$, vadinasi spindulys:

$$R = d \cdot \sin(\alpha) \approx 18{,}4 \text{ Mpc}$$

Ties spiečiaus pakraščiais esančių galaktikų radialinis greitis labiausiai skirsis nuo vidutinio spiečiaus radialinio greičio (v = 500 km/s). Galime laikyti, kad tai aplink spiečiaus centrą besisukančios galaktikos linijinis greitis. Skaičiuojame galaktikų spiečiaus masę (Saulės masėmis $M_{\odot}$):

$$m \cdot a_{ic} = m \cdot a_{grav}$$

$$v^2 / R = G \cdot M \;/ R^2$$

$$M = \frac{(5 \cdot 10^5)^2 \cdot 18{,}4 \cdot 10^6 \cdot 3{,}0857 \cdot 10^{16}}{6{,}673 \cdot 10^{-11}} \approx 2{,}13 \cdot 10^{45}\,\text{kg}$$

$$M = v^2 R / G \approx 1{,}07 \cdot 10^{15} M_{\odot}$$

Kiekvienos galaktikos absoliutinis ryškis:

$$M_V = m + 5 - 5 \cdot \lg d = 18 + 5 - 5\lg(422 \cdot 10^6) = -20{,}1$$

Saulės absoliutinis ryškis 4,8. Vienos galaktikos spindesiui suformuoti tokių kaip Saulė žvaigždžių atitinkamai prireiks N žvaigždžių :

$$M_V - M_s = -2{,}5 \cdot \lg\left(\frac{N \cdot L_s}{L_s}\right)$$

Čia Ms – Saulės absoliutinis ryškis, L_S – Saulės šviesis

$$N = 10^{24{,}9/2{,}5} \approx 10^{9{,}96}$$

Atitinkamai šviečiančioji spiečiaus masė: $M_l = 10^{9{,}96} \cdot 10000 \cdot M_{\odot} = 10^{13{,}96} M_{\odot}$

Tamsiosios medžiagos dalis galaktikų spiečiuje:

$$1-\frac{10^{13,96}}{1.07\cdot 10^{15}}\approx 0{,}92$$

Atsakymas: Tamsiosios medžiagos dalis galaktikų spiečiuje ≈ 92 %.