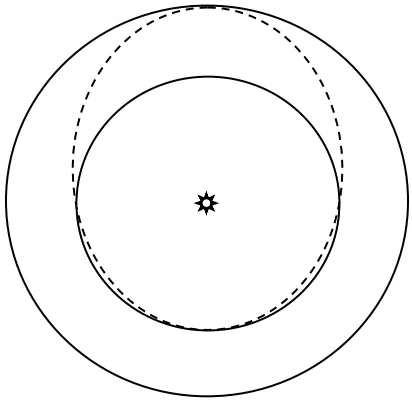
Lietuvos mokinių tryliktoji astronomijos olimpiada

Antrasis turas

XI-XII klasių mokiniai

1 uždavinys **(25t)**

Apie 2035 m. NASA planuoja siųsti pilotuojamą erdvėlaivį į Marsą. Jis praleistų tam tikrą laiko tarpą prie Marso, o po to grįžtų į Žemę. Skrydis vyktų elipsine orbita, kurios vienas galas (periapsis) liestųsi su Žemės orbita, o kitas (apoapsis) – su Marso orbita (žr. 1.1 pav.). **Raskite: a)** Kokioje orbitos pozicijoje starto iš Žemės metu turi būti Marsas (koks kampas Žemė – Saulė – Marsas?), kad pasiekęs savo orbitos apoapsį erdvėlaivis atsidurtų šalia Marso? **b)** Po kokio mažiausio laiko tarpo (Žemės paromis) astronautai galės išskristi iš Marso atgal į Žemę, kad savo orbitos periapsyje erdvėlaivis atsidurtų prie Žemės? Tarkite, kad Marso ir Žemės orbitos apskritiminės ir guli vienoje plokštumoje, Marso orbitos spindulys 1,524 av.



1.1 pav. Erdvėlaivio orbita

Sprendimas

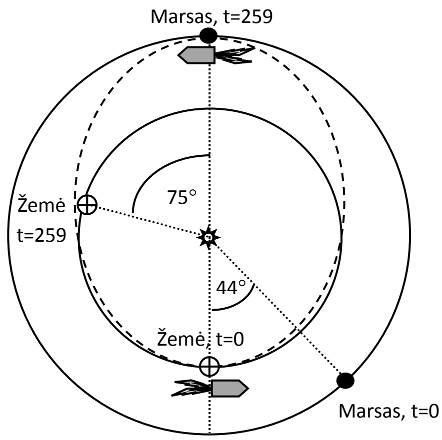
Žemė – Marsas perskridimo orbitos didysis pusašis:
$(1 + 1{,}524)/2 \approx 1{,}262$ av.

Pusė šios orbitos periodo yra skrydžio Žemė – Marsas trukmė:
$365{,}25 \times 1{,}262^{1{,}5}/2 \approx 259$ paros

Marso orbitinis periodas: $365{,}25 \times 1{,}524^{1{,}5} \approx 687$ paros

Erdvėlaivio skrydžio Žemė – Marsas metu Marsas spės įveikti savo orbitos dalį (išreiškus laipsniais): $360° \times 259/687 \approx 136°$

Vadinasi, erdvėlaivio iš Žemės starto metu kampas Žemė–Saulė–Marsas turi būti: $180° - 136° \approx 44°$ (Žemė "atsilieka" nuo Marso).



1.1a pav. Erdvėlaivio orbita

Per tą laiką, kol erdvėlaivis skris iki Marso, Žemė nukeliaus tokią savo orbitos dalį:
$360° \times 259/365{,}25 \approx 255$, t.y., ji $255° - 180° = 75°$ „aplenks" Marsą.

Skrydžiui atgal (Marsas – Žemė orbita) erdvėlaiviui vėl reikės apie 259 parų. Vadinasi, starto iš Marso orbitos metu Žemė turi „atsilikti" nuo Marso per 75°, t.y., ji turi būti toliau nuo tos pozicijos, kurioje yra, kai erdvėlaivis atskrenda į Marsą per: $360° - 75° \times 2 = 210°$.

Marso–Saulės–Žemės santykinės padėtys pasikartoja kas sinodinį periodą: $\frac{1}{S} = \frac{1}{P_Ž} - \frac{1}{P_M}$.

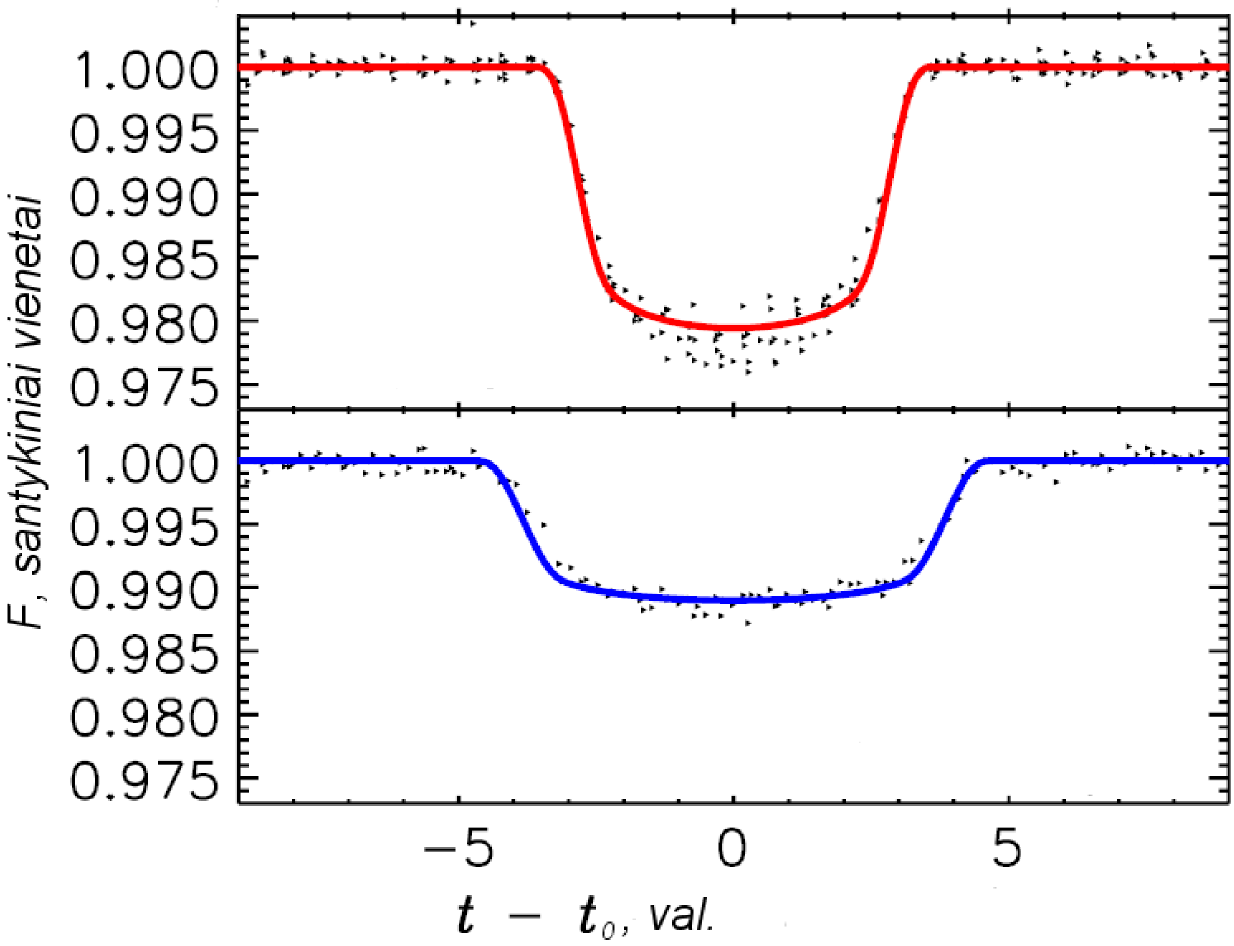
Iš čia $S = \frac{1}{\frac{1}{P_Ž} - \frac{1}{P_M}} = \frac{1}{\frac{1}{365{,}25} - \frac{1}{687}} \approx 780$ parų

Vadinasi, startui iš Marso atgal į Žemę tinkama pozicija bus po: $780 \times \frac{210}{360} \approx 455$ parų .

Ats.: *a) Žemė „atsiliks" nuo Marso 44°, b) startas iš Marso į Žemę galimas po 455 parų.*

2 uždavinys (15t)

Kosminiu teleskopu „Kepler“, kuris ieško egzoplanetų stebėdamas žvaigždės ryškio pokyčius sukeliamus planetai praslenkant per jos diską, buvo aptikta dviejų planetų, skriejančių apie tą pačią žvaigždę, sistema. Žemiau pateikta šių planetų tranzitų spindesio kitimo kreivės. Yra žinoma, kad stabilioms orbitoms yra būdingi periodai, kurie patenka į orbitinį rezonansą, – kai dvi planetos, besisukančios apie tą pačią žvaigždę, periodiškai gravitaciškai veikia viena kitą, tačiau orbitos lieka stabilios. Orbitinis rezonansas atsiranda, kai planetų periodų santykiai lygūs mažų sveikų skaičių santykiams, pvz., 2:1, 3:2, 4:3. Iš pateiktų grafikų nustatykite, ar egzoplanetos yra orbitiniame rezonanse. Tarkime, kad planetų orbitos yra apskritiminės.



4.1 pav. Žvaigždės, aplink kurią skrieja dvi planetos, spindesio kitimo kreivės planetų tranzito metu. t_0- užtemdymo vidurio laikas.

Sprendimas

Iš 3-ojo Keplerio dėsnio turime:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

čia T_1 – pirmosios planetos orbitos periodas, T_2 – antrosios planetos periodas, a_1 – pirmosios planetos nuotolis nuo žvaigždės, a_2 – antrosios planetos nuotolis nuo žvaigždės. Ieškome planetų periodų santykio:

$$x = \frac{T_2}{T_1}$$

Įstatome į ankstesnę lygtį ir gauname:

$$\frac{1}{a_1^3} = \frac{x^2}{a_2^3}$$

Apskritiminei orbitai greitis bus lygus:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

čia M – žvaigždės masė. Iš šios formulės gauname atstumą:

$$a = \frac{GM}{v^2}$$

Viską sustatę turime:

$$v_1^6 = v_2^6 \cdot x^2$$

Apskaičiuojame orbitų santykį:

$$x = \frac{v_1^3}{v_2^3}$$

Tarkime, kad planeta pereina per žvaigždės diską per laiką t. Tada planetos orbitos greitis bus lygus:

$$v = \frac{D}{t}$$

čia D – žvaigždės skersmuo. Įstatome į ankstesnę formulę:

$$x = \frac{t_2^3}{t_1^3}$$

Iš duoto grafiko surandame tranzitų trukmes:

$$t_2 = 9 \text{ val.}$$

$$t_1 = 7 \text{ val.}$$

Tuomet rezonansas bus:

$$x = \left(\frac{9}{7}\right)^3 = 2.1 \approx 2$$

Ats. Planetos yra orbitiniame rezonanse, 2:1

<u>3 uždavinys</u> (25t)

Tarkime, kad hipotetinė planeta sudaryta iš uolienų (tankis $\rho_u = 3800\ \mathrm{kg/m^3}$) ir vandens (tankis $\rho_v = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$). Planetos spindulys $R = 12000\ \mathrm{km}$. Aplink ją $a = 490\ 000\ \mathrm{km}$ spindulio apskritimine orbita skrieja nedidelis palydovas, kurio orbitinis periodas $P = 20$ Žemės parų.

Užduotys:

1) Raskite, kiek kartų planeta yra masyvesnė už Žemę ($M_Ž$ = 5,97 × 10^{24} kg) ?
2) Raskite, kurią planetos masės dalį sudaro vanduo.
3) Apskaičiuokite vandens sluoksnio storį, jei planetą sudaro uolienų branduolys, kurį supa tolygiai pasklidęs vandens sluoksnis?

<u>Sprendimas</u>

1) Planetos masę randame pasinaudodami III-uoju Keplerio dėsniu:

$$\frac{P^2}{a^3}(M+m) = \frac{4\pi^2}{G}$$

Jei palydovo masė yra daug kartų mažesnė už planetos masę (*m* << *M*) , tada planetos masė:

$$M = \frac{4\pi^2}{G} \times \frac{a^3}{P^2} = \frac{4 \cdot 3.14^2 \cdot 490000000^3}{6{,}67428 \cdot 10^{-11} \cdot (20 \cdot 86400)^2} = 23{,}3 \cdot 10^{24}\mathrm{kg}$$

Žemės masėmis tai yra : 23,3/5,97 ≈ 3,9 $M_Ž$

2) Tarkime, kad planeta yra rutulio formos. Tada planetos tūris $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Tarkime, kad vanduo sudaro f planetos tūrio dalį. Tuomet uolienos sudarys $(1-f)$ planetos tūrio. Sudėję iš vandens ir iš uolienų sudarytų planetos dalių mases, gauname visą planetos masę:

$$M = fV\rho_v + (1-f)V\rho_u = V\big(\rho_u - f(\rho_u - \rho_v)\big).$$

Iš čia gauname vidutinį planetos tankį

$$\rho_{\mathrm{vid}} = \frac{M}{V} = \rho_u - f(\rho_u - \rho_v)$$

ir planetos tūrio dalį, kurią sudaro vanduo,

$$f = \frac{\rho_u - \rho_{\mathrm{vid}}}{\rho_u - \rho_v}.$$

Apskaičiuojame planetos vidutinį tankį

$$\rho_{\mathrm{vid}} = \frac{23{,}3 \cdot 10^{24}}{\frac{4}{3}\pi(1{,}2 \cdot 10^7)^3} = 3217\ \ \mathrm{kg/m^3}.$$

Apskaičiuojame planetos tūrio vandens dalį:

$$f = \frac{3800 - 3217}{3800 - 1000} = 0{,}2082$$

Planetos masės dalis, kurią sudaro vanduo, lygi

$$\mu_v = \frac{fV\rho_v}{M} = f\,\frac{\rho_v}{\rho_{\mathrm{vid}}}.$$

Apskaičiuojame

$$\mu_v = 0{,}2082\frac{1000}{3217} \approx 0{,}065.$$

3) Tarkime, kad vandens sluoksnio, supančio planetos uolinį branduolį, storis D_v. Tuomet planetos uolinio branduolio tūris lygus

$$V_u = (1-f)V = (1-f)\tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{4}{3}\pi(R-D_v)^3.$$

Iš čia

$$D_v = R - \sqrt[3]{(1-f)R^3} = R\left(1-\sqrt[3]{1-f}\right).$$

Apskaičiuojame

$$D_v = 12000\left(1-\sqrt[3]{1-0{,}2082}\right) \approx 900 \text{ km}$$

Ats.: 1) Planeta yra apie 3,9 kartus masyvesnė už Žemę;

2) vandens masės dalis apytiksliai 0,065 arba 6,5%;

3) vandens sluoksnio storis apie 900 km.

4 uždavinys **(15t)**

Pulsuojančiosios kintamosios žvaigždės spindesys kinta tokiu būdu, kad jos paviršiaus atomų šiluminio judėjimo greičio santykis su žvaigždės antruoju kosminiu greičiu visą laiką pastovus. Raskite žvaigždės spindulio spindesio maksimume santykį su jos spinduliu spindesio minimume. Žinoma, kad žvaigždės spindesys kinta 1,2 ryškio ribose. Žvaigždės paviršiuje esanti medžiaga yra neutralios atominės dujos termodinaminėje pusiausvyroje.

Sprendimas

Atomo kinetinė energija lygi

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{3}{2}kT$$

Čia μ – atomo masė, v – atomo judėjimo greitis, T – dujų kinetinė temperatūra, k – Bolcmano konstanta. Esant termodinaminei pusiausvyrai kinetinė temperatūra ir žvaigždės efektinė temperatūra sutampa.

Iš čia gauname

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}}$$

Antrasis kosminis greitis lygus

$$v_{2k} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Čia M – žvaigždės masė, R – žvaigždės spindulys, G – gravitacijos konstanta.

Gautų greičių santykis pagal uždavinio sąlygą turi būti pastovus dydis.

$$\frac{v}{v_{2k}} = \frac{\sqrt{\frac{3kT}{\mu}}}{\sqrt{\frac{2GM}{R}}} = \sqrt{\frac{3k}{2GM\mu}}\sqrt{TR} = \mathrm{const}$$

Po pirmuoju šaknies ženklu esantis santykis yra konstanta, nes nagrinėjamos žvaigždės masė nesikeičia, o kiti dydžiai konstantos. Kinta tik žvaigždės temperatūra ir spindulys. Todėl

$$TR = \mathrm{const} \text{ arba } T = \frac{\mathrm{const}}{R}$$

Pažymėkime T_1 ir R_1 žvaigždės temperatūrą ir spindulį spindesio maksimume, o T_2 ir R_2 jos temperatūrą ir spindulį spindesio minimume. Remiantis juodojo kūno spinduliavimo dėsniu (Stefano ir Bolcmano) žvaigždės šviesis lygus

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Žvaigždės ryškių spindesio maksimume ir spindesio minimume skirtumas lygus

$$m_1 - m_2 = -2{,}5\lg\frac{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4}{4\pi R_2^2 \sigma T_2^4}$$

Iš čia

$$m_1 - m_2 = -2{,}5\lg\frac{R_1^2\left(\frac{\mathrm{const}}{R_1}\right)^4}{R_2^2\left(\frac{\mathrm{const}}{R_2}\right)^4} = 5\lg\frac{R_1}{R_2} = -1{,}2$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 10^{-0{,}24} = 0{,}58$$

Ats.: Spindulių santykis 0,58, t.y. spindesio maksimume žvaigždė mažesnė.

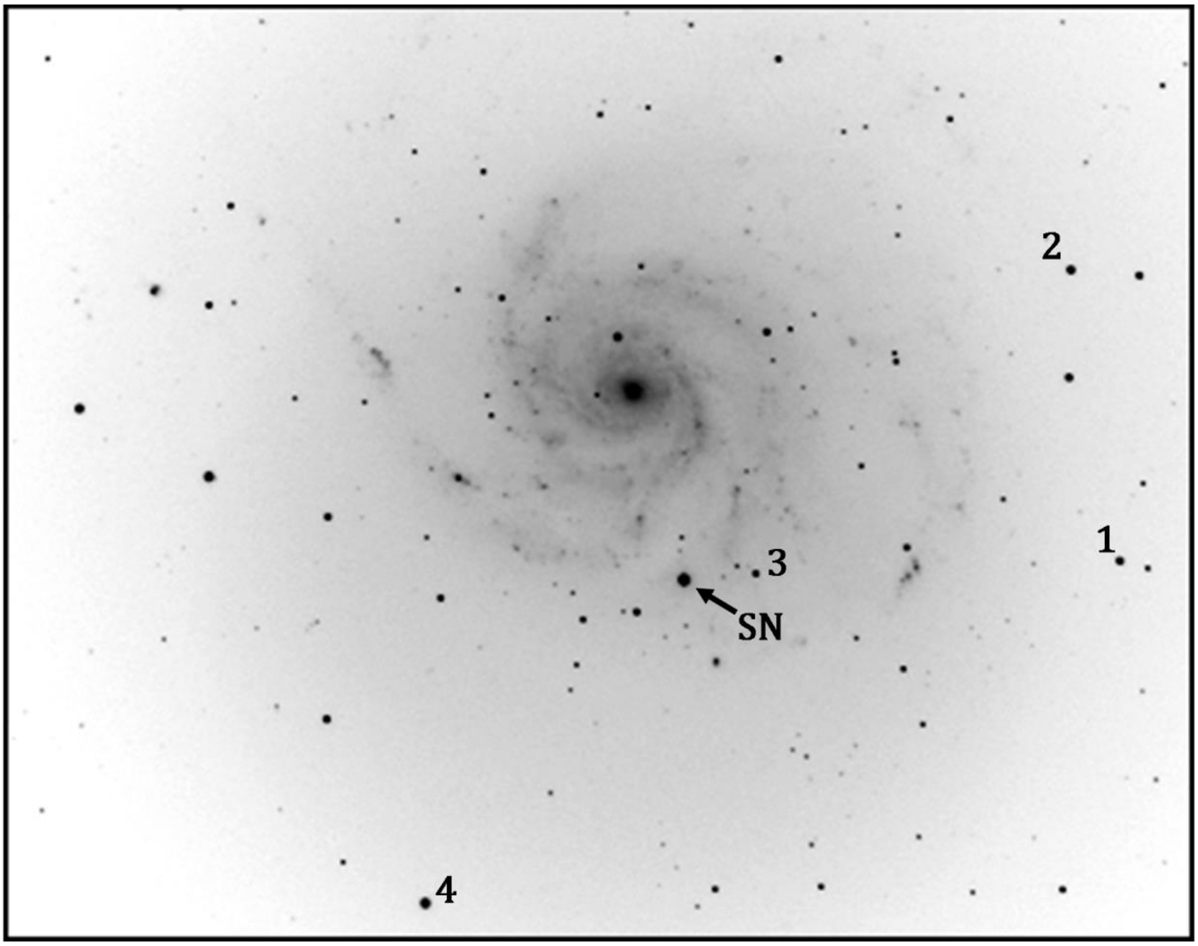
5 uždavinys (20t)

Vienoje spiralinėje galaktikoje sprogo Ia tipo supernova. 5.1 pav. pateikta šios galaktikos ir jos aplinkos nuotrauka, nufotografuota su šviesos filtru B. Joje rodykle pažymėta supernova (SN), o skaičiais – žvaigždės, kurioms nurodytos tikslios pusiaujinės koordinatės (5.1 lent.) ir regimieji ryškiai m_B. Supernovos regimojo ryškio B (m_B) kitimo priklausomybės nuo laiko t (laikas matuojamas dienomis nuo stebėjimų pradžios) grafikas pateiktas 5.2 pav.

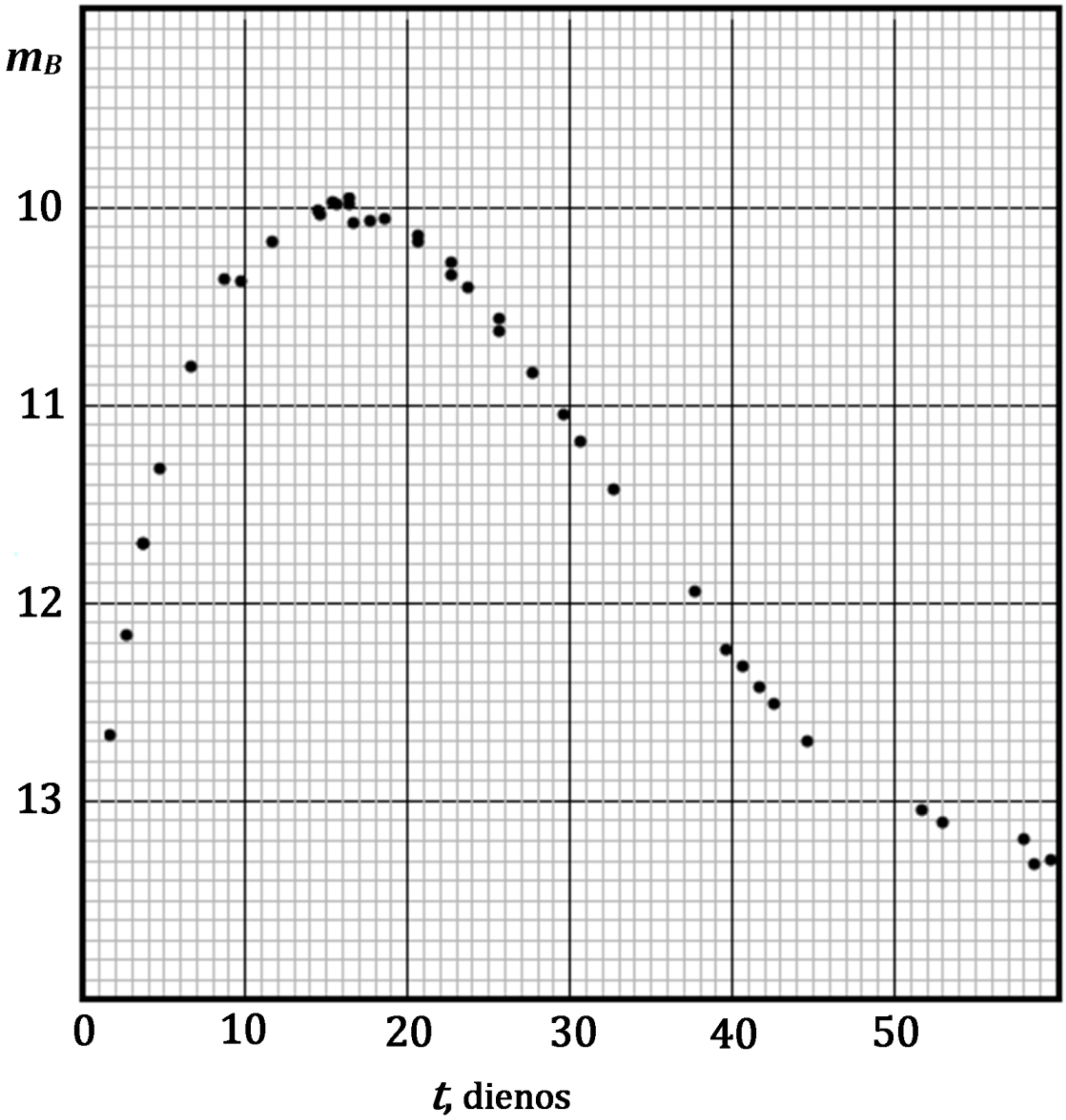
1) Apskaičiuokite supernovos absoliutųjį ryškį M_B spindesio maksimume pasinaudodami šia formule $M_B = -19{,}32 + 0{,}64(\Delta m_{15} - 1{,}1)$. Čia Δm_{15} yra supernovos regimojo ryškio m_B, išmatuoto, praėjus lygiai 15-ai dienų po supernovos spindesio maksimumo momento, ir jos regimojo ryškio spindesio maksimume skirtumas.

2) Apskaičiuokite atstumą nuo Saulės iki supernovos ir galaktikos.

3) Apskaičiuokite linijinį atstumą tarp galaktikos, kurioje sprogo supernova, centro ir supernovos. Tam tikslui panaudokite 5.1 lentelėje pateiktas žvaigždžių koordinates. Tarkite, kad spiralinės galaktikos plokštuma sutampa su 5.1 pav. plokštuma.



5.1 pav. Galaktikos, kurioje sprogo supernova, nuotrauka



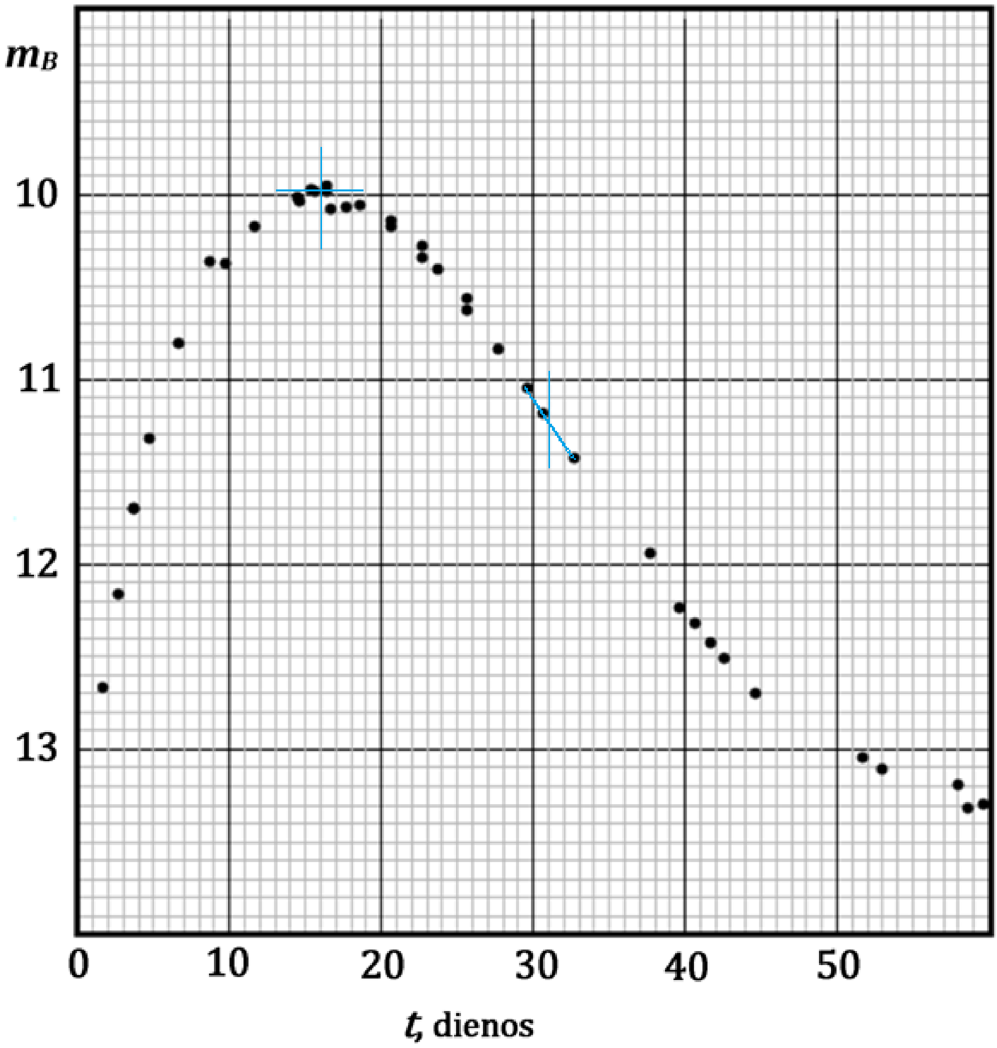
5.2 pav. Supernovos regimojo ryškio kitimo grafikas

5.1 lentelė. 5.1 pav. pažymėtų žvaigždžių koordinatės ir ryškiai

Žvaigždės nr.	Rektascensija	Deklinacija	Ryškis m_B
1	14h01m55,3s	54°16′21″	13,5
2	14h02m0,8s	54°23′16″	13,6
3	14h02m54,2s	54°16′30″	14,6
4	14h03m49,9s	54°09′06″	12,3

Sprendimas

1) Iš grafiko nustatome, kad supernovos ryškis spindesio maksimume lygus 9,98. Spindesio maksimumas pasiektas, praėjus 16 dienų nuo stebėjimų pradžios. 15 dienų po maksimumo momento bus lygu $16 + 15 = 31$ dienai nuo stebėjimų pradžios. Iš grafiko nustatome, kad 31 dieną supernovos ryškis buvo lygus 11,25 (5.1a pav.).



5.1a pav. Supernovos ryškių nustatymas

Iš čia gauname, kad

$$\Delta m_{15} = m_B(15) - m_B(\max) = 11{,}25 - 9{,}98 = 1{,}27.$$

Gautą vertę įstatome į sąlygoje duotą formulę ir apskaičiuojame

$$M_B = -19{,}32 + 0{,}64(1{,}27 - 1{,}1) = -19{,}21$$

2) Kadangi duomenų apie tarpžvaigždinę ekstinkciją galaktikos kryptimi nepateikta, tai tarsime, kad ekstinkcija iki galaktikos lygi nuliui. Atstumą iki supernovos (vadinasi ir iki galaktikos) apskaičiuojame pagal formulę

$$m_B - M_B = 5\lg r - 5$$

Čia regimasis ir absoliutusis ryškiai apskaičiuoti spindesio maksimume. Iš čia

$$lgr = \frac{m_B - M_B + 5}{5} = 6{,}838$$

$$r = 10^{6{,}838} = 6{,}89 \cdot 10^6 \text{ pc} = 6{,}89 \text{ Mpc}$$

3) Naudosime 5.1 pav. Nustatome 5.1 pav. mastelį. Tam tikslui geriausia panaudoti 1 ir 2 žvaigždžių deklinacijas (abi žvaigždės turi beveik tą pačią rektascensiją). Su liniuote išmatuojame atstumą tarp šių žvaigždžių 5.1 pav.: $\Delta l = 39$ mm . Žvaigždžių deklinacijų skirtumas $\Delta\delta = 54°23'16'' - 54°16'21'' = 6'55'' = 415''$. Iš čia mastelis: $\mu = \Delta\delta/\Delta l = 415/39 = 10{,}6''/\text{mm}$. 5.1 pav. su liniuote išmatuojame atstumą tarp supernovos ir galaktikos centro. Kuo tikslesnę galaktikos centro padėtį nustatome pagal galaktikos spiralinės

struktūros vaizdą. Gauname $s = 26\ \mathrm{mm}$. Iš čia kampinis atstumas tarp galaktikos centro ir supernovos $\beta = \mu s = 10{,}6 \cdot 26 = 275{,}6''$. Linijinis atstumas tarp supernovos ir galaktikos centro lygus $d = r\mathrm{tg}\beta$ arba, pritaikius mažų kampų formulę, $d = r\beta$. Čia kampas β turi būti išreikštas radianais. Taigi,

$$d = 6{,}89 \cdot 10^6 \frac{275{,}6}{206265} = 9200\ \mathrm{pc} = 9{,}2\ \mathrm{kpc}$$