Lietuvos mokinių keturioliktoji astronomijos olimpiada

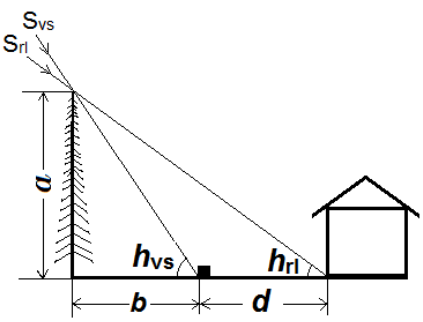
Pirmasis turas

IX – X klasių mokiniai

1 uždavinys

Astronomijos mėgėjas pastebėjo, kad netoli jo namo augančios eglės metamas šešėlis vasaros saulėgrįžos vidurdienį siekia kiemo pakraštyje pastatytą suolelį, o rudens lygiadienio vidurdienį tos pačios eglės metamas šešėlis siekia jo namo pietų sienos pamatą. Išmatavęs atstumą tarp pietinės namo sienos ir suolelio jis apskaičiavo eglės aukštį. Paaiškinkite, kaip astronomijos mėgėjas apskaičiavo eglės aukštį ir atlikite savo skaičiavimus, jei vietovės geografinė platuma 55°, o atstumas tarp pietinės namo sienos ir suolelio lygus 13,3 m.

Sprendimas



Duomenys:
Geografinė platuma $\varphi = 55°$;
Atstumas $d = 13{,}3$ m.
Reikia apskaičiuoti eglės aukštį, $\boldsymbol{a}$.

Astronomijos mėgėjas žinojo, kad rudens lygiadienį Saulės deklinacija $\delta_{rl} = 0°$, o vasaros saulėgrįžos dieną – $\delta_{vs} = 23°26'$. Todėl jis galėjo apskaičiuoti Saulės aukštį virš horizonto atitinkamai rudens lygiadienio ir vasaros saulėgrįžos dienos vidurdieniais:

$$h_{rl} = 90° - \varphi + \delta_{rl} = 90° - 55° + 0° = 35°$$

$$h_{vs} = 90° - \varphi + \delta_{vs} = 90° - 55° + 23°26' = 58°26'$$

Eglės šešėlio ilgis rudens lygiadienio vidurdienį

$$b + d = \frac{a}{\tan h_{rl}}$$

Eglės šešėlio ilgis vasaros saulėgrįžos vidurdienį

$$b = \frac{a}{\tan h_{vs}}$$

Išsprendę šių dviejų lygčių sistemą randame eglės aukštį

$$a = d\,\frac{\tan h_{rl}\,\tan h_{vs}}{\tan h_{vs} - \tan h_{rl}}$$

$$a = 13{,}3\,\frac{\tan 35°\,\tan 58°26'}{\tan 58°26' - \tan 35°} = 16{,}3\text{ m}$$

Ats.: 16,3 m.

2 uždavinys

Prie veidrodinio Ričio ir Kretjeno sistemos teleskopo, kurio pagrindinio veidrodžio skersmuo 1016 mm ir ekvivalentinis židinio nuotolis 13300 mm, prijungta 2048×2048 pikselių CCD kamera, kurios vieno pikselio matmenys 15×15 µm. Apskaičiuokite, kokie bus 7,5 kampinių minučių skersmens kamuolinio spiečiaus atvaizdo, nufotografuoto su šiuo teleskopu ir kamera, matmenys (skaičiuojant pikseliais). Ar visas kamuolinio spiečiaus atvaizdas išsiteks ant CCD kameros?

Sprendimas

Kamuolinio spiečiaus atvaizdo linijinis skersmuo teleskopo ekvivalentiniame židinyje (naudojame mažų kampų formulę):

$$b = f\frac{\beta''}{206265} = 13300\frac{7,5\times 60}{206265} = 29 \text{ mm}$$

Čia β – kamuolinio spiečiaus kampinis skersmuo, išreikštas kampo sekundėmis.
Skaičiuojant pikseliais atvaizdo skersmuo lygus

$$b_{\mathrm{pk}} = \frac{b}{0,015} = \frac{29}{0,015} = 1934,4 \cong 1935 \text{ pikseliai}$$

Ats.:¨Kamuolinio spiečiaus atvaizdas užims 1935×1935 pikselių plotą ir tikrai išsiteks ant CCD kameros.

3 uždavinys

Apie žvaigždę, kurios masė $\mathrm{M}_* = 0{,}1\ \mathrm{M}_\odot$, vienoje plokštumoje elipsinėmis orbitomis viena kryptimi sukasi kelios planetos, kurių duomenys duoti lentelėje:

Planeta	**Masė, m** (M$_\mathrm{J}$ - Jupiterio masė, M$_\oplus$ - Žemės masė)	**Orbitos didysis pusašis, a** (astronominiai vienetai, au)
1	6,8 M$_\oplus$	0,03
2	9,5 M$_\oplus$	0,27
3	7,8 M$_\mathrm{J}$	0,44
4	7,2 M$_\oplus$	0,52
5	4,9 M$_\mathrm{J}$	0,69

Čia $\mathrm{M}_\odot$ – Saulės masė, M_J – Jupiterio masė, $\mathrm{M}_\oplus$ – Žemės masė.

Dvi planetos skrieja rezonansinėmis orbitomis, jei santykis tarp šių planetų sinodinio periodo ir arčiau prie žvaigždės skriejančios planetos orbitinio periodo yra apytiksliai (±0,1 ir tiksliau) lygus didesniam už 1 sveikam skaičiui.

Raskite, kurios planetų poros šioje sistemoje skrieja rezonansinėmis orbitomis.

Sprendimas

Sinodinis periodas tarp planetų A ir B, kai $T_\mathrm{A} < T_\mathrm{B}$:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} \quad \rightarrow \quad S = \frac{T_A T_B}{T_B - T_A}$$

Sinodinio ir artimesnės žvaigždei planetos orbitinio periodo santykis:

$$n = \frac{S}{T_A} = \frac{T_B}{T_B - T_A}$$

Remdamiesi apibendrintu III Keplerio dėsniu randame planetų orbitinius periodus *T*, išreikštus Žemės paromis:

$$\frac{T^2}{a^3}(M_* + m) = \frac{4\pi^2}{G} \quad \rightarrow \quad T(\text{dienos}) = \frac{2\pi}{86400}\sqrt{\frac{a^3}{G(M_* + m)}}$$

Pastaba: galima atmesti 1, 2 ir 4 planetų mases (nes jų masės mažos), o 3 ir 5 planetų masės turi būti įskaitytos.

Planeta	**T (dienos)**
1	6
2	162
3	325
4	433
5	647

Surandame visoms galimoms planetų poroms reikšmes *n*. Pagal sąlygą rezonansinėse orbitose bus tos planetos, kurių *n* yra lygus didesniam už 1 sveikam skaičiui.

Pora	n_A	Ar rezonansinės?
5:4	647/(647-433) ≈ 3,02 ≈ **3**	**taip**
5:3	647/(647-325) ≈ 2,01 ≈ **2**	**taip**
5:2	647/(647-162) ≈ 1,33	ne
5:1	647/(647-6) ≈ 1	ne
4:3	433/(433-325) ≈ 4,01 ≈ **4**	**taip**
4:2	433/(433-162) ≈ 1,6	ne
4:1	433/(433-6) ≈ 1	ne
3:2	325/(325-162) ≈ 1,99 ≈ **2**	**taip**
3:1	325/(325-6) ≈ 1	ne
2:1	162/(162-6) ≈ 1	ne

Ats.: Rezonansinėse orbitose yra planetų poros: 5 - 4, 5 - 3, 4 - 3, 3 - 2.

4 uždavinys

Apskaičiuokite kvazaro, kurio kosmologinis raudonasis poslinkis z = 0,1, Galaktinį paralaksą (kampą kuriuo iš kvazaro matomas Saulės orbitos Galaktikoje spindulys).

Sprendimas

Kvazaro nuotolį randame iš Hablo dėsnio:

$$L = \frac{cz}{H} = \frac{3 \times 10^5 \mathrm{km/s} \times 0{,}1}{68\ (\mathrm{km/s})/\mathrm{Mpc}} \approx 441\mathrm{Mpc}$$

Saulės orbitos spinduliu laikome, jos dabartinį nuotolį nuo Galaktikos centro: r $\approx$ 8,3 kpc

$$\pi = \frac{r}{L} = \frac{8{,}3 \times 10^3 \mathrm{pc}}{441 \times 10^6 \mathrm{pc}} \approx 1{,}9 \times 10^{-5} \mathrm{rad} \times 206265 \approx 3{,}9'' \approx 0{,}001^\circ$$

Ats.: Kvazaro Galaktinis paralaksas 3,9″ (0,001°).