Lietuvos mokinių keturioliktoji astronomijos olimpiada
Antrasis turas. Uždavinių sprendimai
XI-XII klasių mokiniai

1. Uždavinys (15 t)

1a) Besitraukiančios prožvaigždės spindulys penkis kartus didesnis už Saulės spindulį, o temperatūra lygi 2000 K. Koks jos šviesis skaičiuojant Saulės šviesiais?

Sprendimas

Jei žvaigždė yra taisyklingo rutulio formos ir spinduliuoja kaip absoliučiai juodas kūnas, tai remiantis Stefano ir Bolcmano dėsniu jos šviesis yra lygus

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$$

Čia R – žvaigždės spindulys, T – jos efektinė temperatūra.
Remiantis šia formule randame žvaigždės ir Saulės šviesių santykį

$$\frac{L}{L_S} = \left(\frac{R}{R_S}\right)^2 \left(\frac{T}{T_S}\right)^4$$

Iš čia

$$L = \left(\frac{R}{R_S}\right)^2 \left(\frac{T}{T_S}\right)^4 L_S$$

$$L = \left(\frac{5R_S}{R_S}\right)^2 \left(\frac{2000}{5780}\right)^4 L_S = 0{,}36 L_S$$

Ats.: $0{,}36\ L_S$

1b) Tyrinėjant meteoritą buvo nustatyta, kad meteorito formavimosi momentu (laiko momentas t = 0) viename į jį patekusiame mineralų junginyje izotopų ^{26}Al ir ^{27}Al santykis buvo 6×10^{-5}, o kitame – 8×10^{-6}. Izotopas ^{27}Al yra neradioaktyvus (jo kiekis laikui bėgant nesikeičia), o izotopas ^{26}Al – radioaktyvus (jo kiekio pusėjimo trukmė τ = 0,717 milijonai metų). Raskite, kiek metų pirmasis mineralų junginys yra senesnis už antrąjį (prieš kiek metų pirmasis mineralas susidarė anksčiau už antrąjį).

Sprendimas

Laikui bėgant meteorite kito tik ^{26}Al kiekis, o stabilaus izotopo ^{27}Al kiekis nekito.
Vadinasi, bet kokiu laiko momentu t jų santykis

$$(^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al}) = (^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al})_0 \times e^{-t\frac{0{,}693}{\tau}},$$

čia $(^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al})_0$ – izotopų santykis pradiniu laiko momentu (t = 0).
Kai formavosi pirmas mineralas, izotopų santykis buvo

$$(^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al})_1 = (^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al})_0 \times e^{-t_1\frac{0{,}693}{\tau}}$$

Kai formavo antras mineralas, izotopų santykis buvo

$$(^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al})_2 = (^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al})_0 \times e^{-t_2\frac{0{,}693}{\tau}}$$

Padalinę vieną lygtį iš kitos gauname

$$\frac{(^{26}\mathrm{Al}/^{27}\mathrm{Al})_1}{(^{26}\mathrm{Al}/^{27}\mathrm{Al})_2} = e^{\frac{0,693}{\tau}(t_2 - t_1)}$$

Iš jos gauname laiko skirtumą

$$t_2 - t_1 = \frac{\tau}{0,693} \times \ln\left[\frac{(^{26}\mathrm{Al}/^{27}\mathrm{Al})_1}{(^{26}\mathrm{Al}/^{27}\mathrm{Al})_2}\right] = \sim 2\,\mathrm{Myr}$$

Ats.: Pirmas mineralas senesnis už antrąjį apytiksliai 2 milijonais metų.

1c) Stebima diskinė galaktika, kurios disko kampinis skersmuo 0′,5 (kampinės minutės). Šios galaktikos spektro linijų raudonasis poslinkis $\delta\lambda/\lambda = 0,02$. Raskite šios galaktikos disko skersmenį parsekais.

Sprendimas

$$d = \frac{c \times z \times \alpha}{H} \approx \frac{3 \times 10^5 \left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right] \times 0,02 \times \left(\frac{0,5}{60}\right) \times \left(\frac{\pi}{180}\right)[\mathrm{rad}]}{71 \left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}/\mathrm{Mpc}\right]} \approx 0,0123\ \mathrm{Mpc} \approx 12,3\ \mathrm{kpc}$$

2. Uždavinys (20 t)

Atlikus planetiškojo ūko stebėjimus dviem skirtingomis epochomis su radiointerferometru nustatyta, kad maždaug sferos formos ūko kampinis skersmuo 1986,5 metais buvo lygus 13″,276 (kampinių sekundžių), o 2007,8 metais – 13″,400. Iš spektroskopinių matavimų nustatyta, kad ūkas plečiasi 30 km/s greičiu. Planetiškojo ūko regimasis ryškis, išmatuotas kartu su centrine žvaigžde, lygus 8,84, o pačio ūko vienos kvadratinės sekundės plotelio ryškis vidutiniškai lygus 15,50. Apskaičiuokite šiuos planetiškojo ūko ir centrinės žvaigždės parametrus (2007,8 epochai):

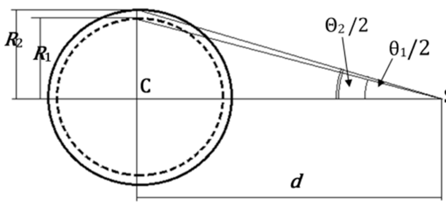
1) Planetiškojo ūko atstumą (parsekais);
2) Planetiškojo ūko linijinį skersmenį (parsekais);
3) Planetiškojo ūko amžių (metais);
4) Centrinės žvaigždės regimąjį ryškį (be ūko);
5) Centrinės žvaigždės absoliutųjį ryškį;
6) Centrinės žvaigždės šviesį (Saulės šviesio vienetais), jei bolometrinė pataisa BC=–3,50.
7) Ūko masę (Saulės masės vienetais), jei jis būtų sudarytas vien tik iš vandenilio atomų ir jei jo vidutinis tankis 9000 atomų/cm^3.

Sprendimas

1986,5 epochoje (t_1):

Ūko kampinis skersmuo θ_1=13″,276

Ūko spindulys R_1



2007,8 epochoje (t_2):

Ūko kampinis skersmuo θ_2=13″,400

Ūko spindulys R_2

Ūko plėtimosi greitis v=30 km/s;

Žvaigždės ryškis (kartu su ūku) m_{z+u}=8,84;

Ūko 1 kv. sekundės ryškis m_{u1}=15,5.

1) Planetiškojo ūko atstumas

Ūko kampinis plėtimosi greitis

$$\varphi = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2(t_2 - t_1)} = \frac{13,400 - 13,276}{2(2007,8 - 1986,5)} = 0,0029 \text{ arcsec/metus}$$

Ūko kampinio ir linijinio plėtimosi greičių sąryšis

$$\tan\varphi = \frac{v}{d}$$

Patogiau naudoti mažų kampų formulę

$$\varphi = \frac{v}{d}$$

Čia kampas φ išreikštas radianais. Kadangi kampinis greitis apskaičiuotas arcsec/metus, linijinis greitis – km/s, o atstumą turim apskaičiuoti parsekais, tai atitinkamai pertvarkome šią formulę

$$\frac{\varphi[\text{arcsec/metus}]}{206265} = \frac{v \times 3,156 \cdot 10^7}{1,496 \cdot 10^8 \times 206265 \times d} = 0,211 \frac{v[\text{km/s}]}{d[\text{pc}]}$$

Iš čia

$$d = 0,211 \frac{v}{\varphi}$$

$$d = 0,211 \frac{30}{0,0029} = 2183 \text{ pc}$$

2) Planetiškojo ūko linijinis skersmuo 2007,8 epochoje

$$R_2 = \frac{\theta_2}{2 \times 206265} d = \frac{13,4}{2 \times 206265} 2183 = 0,071 \text{ pc}$$

Ūko skersmuo $2R_2 = 2 \times 0,071 = 0,142\text{pc}$

3) Planetiškojo ūko amžius

$$\tau = \frac{\theta_2}{2\varphi} = \frac{13,4}{2 \cdot 0,0029} = 2310 \text{ metų}$$

4) Centrinės žvaigždės regimasis ryškis (be ūko)

Galime sumuoti tik spindesius (spinduliuotės srautus). Todėl duotus ryškius turime versti spindesiais.
Iš išmatuotojo regimojo ryškio žvaigždė+ūkas apskaičiuojame spindesį:

$$J_{z+u} = J_0 \cdot 10^{-0,4 m_{z+u}} = J_0 \cdot 10^{-0,4 \cdot 8.84} = 2,91 \cdot 10^{-4} J_0$$

Ūko vienos kv. kampinės sekundės spindesys

$$J_{u1} = J_0 \cdot 10^{-0,4 m_{u1}} = J_0 \cdot 10^{-0,4 \cdot 15,5} = 6,31 \cdot 10^{-7} J_0$$

Ūko kampinis plotas dangaus plokštumoje

$$\sigma = \pi \left(\frac{\theta_2}{2}\right)^2 = 3,14 \cdot 6,7^2 = 141$$

Žvaigždės spindesys

$$J_z = J_{z+u} - \sigma J_{u1} = 2,91 \cdot 10^{-4} J_0 - 141 \times 6,31 \cdot 10^{-7} J_0 = 2,02 \cdot 10^{-4} J_0$$

Žvaigždės ryškis

$$m_z = -2,5 \log \frac{J_z}{J_0} = -2,5 \log 2,02 \cdot 10^{-4} = 9,24$$

5) Centrinės žvaigždės absoliutusis ryškis:

$$M = m_z - 5\log d + 5 = 9,24 - 5\log 1091 + 5 = -2,46$$

6) Centrinės žvaigždės šviesis:
Randame absoliutųjį bolometrinį ryškį

$$M_b = M + BC = -2,46 - 3,50 = -5,96$$

Absoliučiojo bolometrinio ryškio ir šviesio sąryšis

$$M_b - M_{bSaule} = -2,5\log\frac{L}{L_{Saule}}$$

Žvaigždės šviesis

$$L = 10^{-0,4\left(M_b - M_{bSaule}\right)} L_{Saule} = 10^{-0,4(-5,96-4,74)} L_{Saule} = 19055 L_{Saule}$$

7) Ūko masė
Ūko tūris

$$V = \frac{4}{3}\pi R_2^3$$

Ūko masė, apskaičiuota Saulės masės vienetais

$$\mathcal{M}_u = \frac{Vnm_p}{\mathcal{M}_{Saule}} = \frac{4\pi\left(0,071\cdot 3,086\cdot 10^{16}\right)^3 9000\cdot 10^6\cdot 1,673\cdot 10^{-27}}{3\cdot 1,989\cdot 10^{30}} = 0,33$$

3. Uždavinys (10 t)

Apie Saulę skrieja greitai besisukantis tamsus asteroidas. Jo šiluminės spinduliuotės maksimumą atitinkantis bangos ilgis jam skriejant orbita gali pakisti 3 kartus. Raskite asteroido orbitos ekscentricitetą.

Sprendimas
Kai asteroidas būna arčiau Saulės jo paviršiaus temperatūra būna aukštesnė (o spinduliuotės maksimumo bangos ilgis trumpesnis), negu tuomet, kai jis būna toliau nuo Saulės. Pagal Vyno dėsnį spinduliuotės maksimumo: $\lambda = b/T$, kur b – konstanta, o T – paviršiaus temperatūra. Tada, jei $\lambda_2 = 3\ \lambda_1$:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{T_1}{T_2} = 3$$

Šiluminėje pusiausvyroje esančio asteroido:

$$E_{sugeriama} = E_{spinduliuojama}$$

$$E_{sugeriama} \sim \frac{1}{R^2} \qquad E_{spinduliuojama} \sim T^4$$

Kai asteroidas būna arčiausiai Saulės $R_1 = a(1-e)$, o kai toliausiai $R_2 = a(1+e)$, vadinasi

$$\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{T_1^4}{T_2^4} \quad \rightarrow \quad \frac{1+e}{1-e} = 3^2 = 9$$

$$1 + e = 9 - 9e \quad \rightarrow \quad e = 0,8$$

4. Uždavinys (25t)

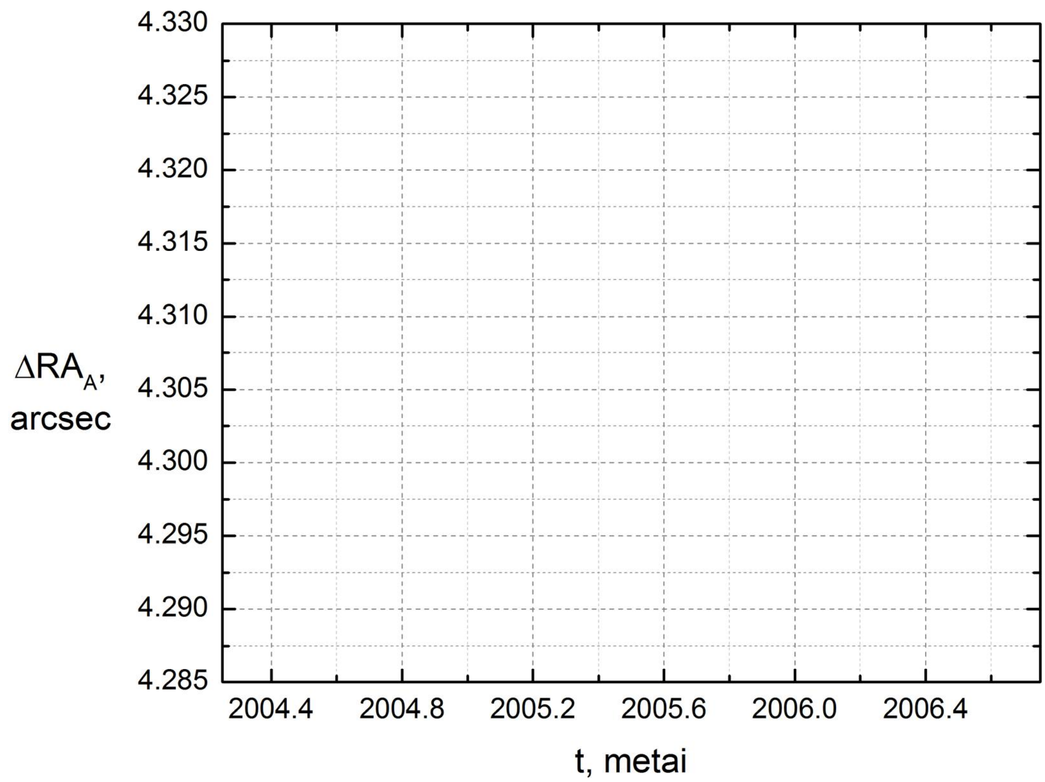
2005 metais astronomų grupė nufotografavo planetą (GQ Lupi b), besisukančią aplink žvaigždę GQ Lupi A, kurios masė $0{,}7M_{\odot}$, o deklinacija $\delta = -35°39'$. Mokslininkai iš fotometrinių duomenų nustatė žvaigždės sukimosi periodą ir jos sukimosi ašies posvyrio kampą į regėjimo spindulį, $i = 27°$. 4.1 lentelėje pateikiamos žvaigždės ir planetos padėtys tolimos žvaigždės (cc2) atžvilgiu.

4.1 lentelė. Žvaigždės GQ Lupi A bei planetos GQ Lupi b astrometrija. Lentelėje laikas pateikiamas metais ir metų dalimis, kampiniai atstumai – kampinėmis sekundėmis.

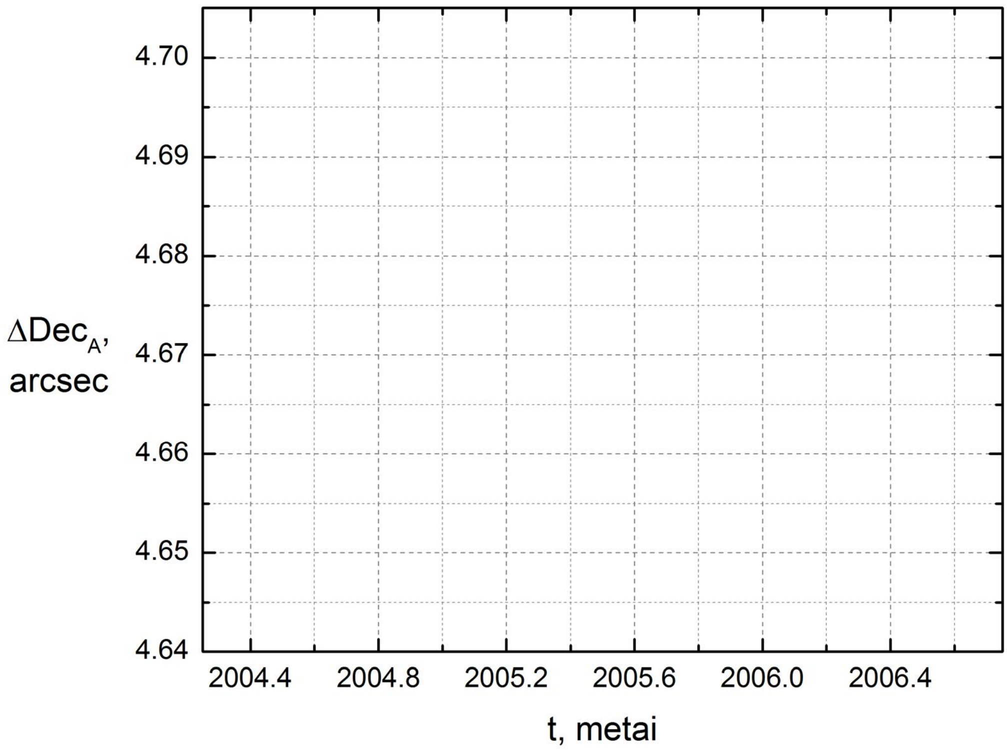
Data, metais	Kampinis atstumas tarp tolimos žvaigždės cc2 ir GQ Lupi A		Kampinis atstumas tarp tolimos žvaigždės cc2 ir planetos GQ Lupi b	
	$\Delta RA_A''$	$\Delta Dec_A''$	$\Delta RA_b''$	$\Delta Dec_b''$
2004,48	4,3265	4,6473	3,5953	4,5775
2005,40	4,3120	4,6739	3,5812	4,5969
2005,60	4,2977	4,6715	3,5703	4,5956
2006,14	4,3041	4,6909	3,5786	4,6134
2006,54	4,2888	4,6965	3,5590	4,6272

Tarkime, kad šių objektų koordinatės kinta tik dėl savojo judėjimo bei metinio paralakso. Laikydami, kad planeta skrieja apskritimine orbita ir kad planetos orbitos plokštuma statmena žvaigždės sukimosi ašiai, iš žemiau pateiktų duomenų nustatykite:

1) Atidėkite žvaigždės rektascensijos bei deklinacijos priklausomybės nuo laiko grafikus (4.1 ir 4.2 pav.). Atskirkite savuosius judėjimus nuo paralakso rektascensijos ir deklinacijos kryptimis. Apskaičiuokite žvaigždės paralaksą.



4.1 pav. Žvaigždės GQ Lupi rektascensijos kitimas



4.2 pav. Žvaigždės GQ Lupi deklinacijos kitimas

2) Apskaičiuokite regimąjį kampinį planetos atstumą iki žvaigždės.

3) Kadangi planetos padėtis orbitos projekcijoje dangaus skliaute nėra žinoma, apskaičiuokite planetos periodus dviem kraštiniais atvejais:

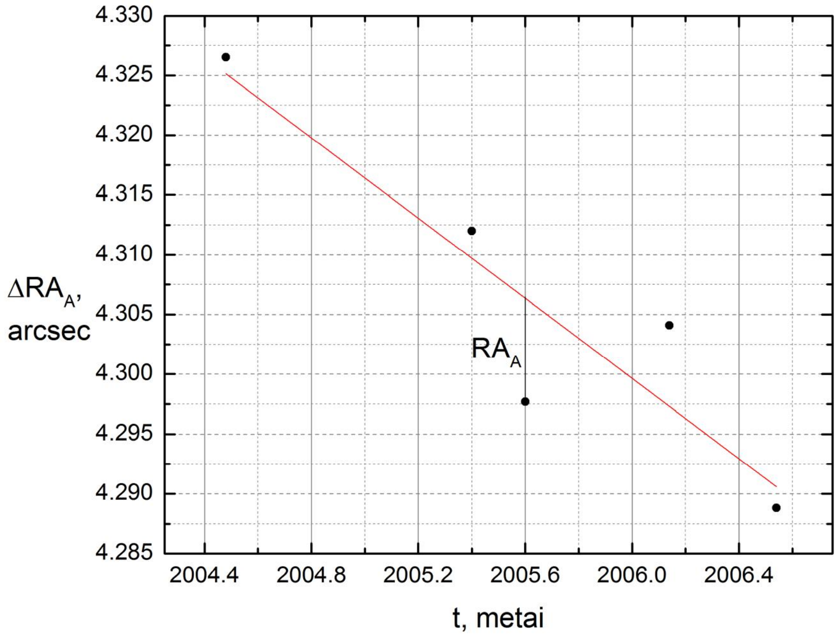
a) Laikydami, kad planeta šiuo metu orbitos projekcijoje dangaus skliaute yra tolimiausiame taške (mažiausias galimas periodas).

b) Laikydami, kad planeta šiuo metu orbitos projekcijoje dangaus skliaute yra arčiausia žvaigždės (didžiausias galimas periodas).

Sprendimas

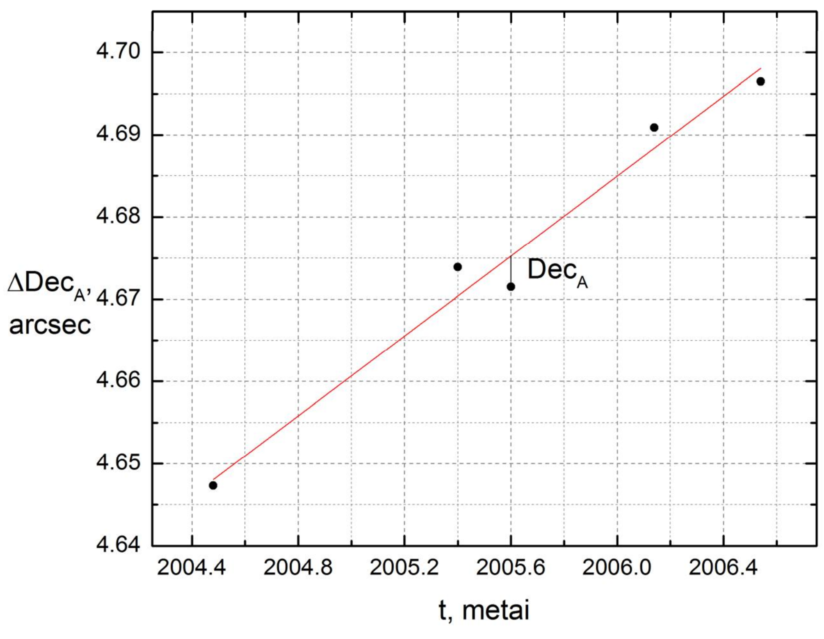
1. Žvaigždės paralaksas.

Kampiniai atstumai (ΔRA_A ir ΔDec_A) tarp tolimos žvaigždės ir GQ Lupi kinta dėl žvaigždės savojo judėjimo ir paralakso. Jei žvaigždė neturėtų paralakso, o tik savuosius judėjimus, atidėjus žvaigždės padėties priklausomybę nuo laiko rektascensijos ir deklinacijos kryptimis, gautume tiesę. Dėl žvaigždės paralakso, matysime periodinį svyravimą apie šią tiesę. Tad norint rasti paralaksą, reikia atskirti savąjį judėjimą nuo judėjimo dėl metinio paralakso. Atidedame grafike žvaigždės GQ Lupi A ΔRA_A priklausomybę nuo laiko ir išbrėžiame tiesę:



4.1a pav. Žvaigždės GQ Lupi rektascensijos kitimas. Dėl savojo judėjimo rektascensijos kryptimi žvaigždė judėtų tiese. Dėl paralakso žvaigždės padėtis svyruos apie išbrėžtą tiesę.

Atidedame grafike žvaigždės GQ Lupi A ΔDec_A priklausomybę nuo laiko ir išbrėžiame tiesę:



4.2 pav. Žvaigždės GQ Lupi deklinacijos kitimas. Dėl savojo judėjimo deklinacijos kryptimi žvaigždė judėtų tiese. Dėl paralakso, žvaigždės padėtis svyruos apie išbrėžtą tiesę.

Įvertiname kiekvieno taško nuokrypį nuo tiesės ir rezultatus surašome į lentelę. Dera nepamiršti, kad rektascensijos kryptimi, kampinis atstumas priklausys nuo deklinacijos. Tuomet pilnas nuokrypis bus lygus:

$$\Delta = \sqrt{(Dec_A)^2 + (RA_A)^2\cos^2\delta}$$

RA_A, $''$	Dec_A, $''$	$RA_A\cos\delta$, $''$	Δ, $''$
0,001	0,001	0,001	0,001
0,002	0,004	0,002	0,004
–0,009	–0,004	–0,007	0,008
0,007	0,003	0,005	0,006
–0,002	–0,002	–0,001	0,002

Didžiausias nuokrypis Δ atitiks žvaigždės paralaksinės elipsės didįjį pusašį. Tai ir bus ieškomas paralaksas:

$$p \cong \Delta_{max} \approx 0{,}008''$$

2. *Regimasis kampinis planetos atstumas iki žvaigždės.*

   Iš pateiktų duomenų apskaičiuojame regimąjį kampinį atstumą tarp žvaigždės ir planetos:

$$< RA_b > = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta RA_{Ai} - \Delta RA_{bi}) \approx 0{,}73''$$

$$< Dec_b > = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta Dec_{Ai} - \Delta Dec_{bi}) \approx 0{,}07''$$

   Tuomet pilnas kampas tarp žvaigždės ir planetos bus lygus:

$$\alpha = \sqrt{< RA_b >^2 \cdot \cos^2\delta + < Dec_b >^2} \approx 0{,}6''$$

3. *Planetos orbitos galimų periodų ribos.*

   Regimasis atstumas tarp planetos ir žvaigždės bus lygus

$$d = \frac{\alpha}{p} = \frac{0{,}6}{0{,}008} \approx 75 \text{ au}$$

   a) Trumpiausias periodas bus, jei regimasis planetos atstumas sutampa su planetos orbitos vidutiniu atstumu nuo žvaigždės:

$$a_1 = d$$

Tuomet:

$$P_1 = \sqrt{\frac{a_1^3}{M}} \approx 780 \text{ metų}$$

   b) Didžiausias periodas bus tuo atveju, jei regimasis planetos atstumas yra orbitos posvyrio projekcija:

$$a_2 = \frac{d}{\sin i} \approx 165 \text{ au.}$$

$$P_2 = \sqrt{\frac{a_2^3}{M}} \approx 2500 \text{ metų}$$