

66-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Kaunas, 2017 03 17

11–12 klasės

1. Raskite visus realiuosius skaičius  $x$ , kurie tenkina tokią sąlygą: bet kuriems realiesiems skaičiams

$$0 < a \leq b \leq c < a + b$$

teisinga nelygybė

$$x + c \leq (x + a)(x + b).$$

2. Duotas trikampis  $ABC$ , kuriame  $\angle A - \angle B = 90^\circ$ . Tegul  $D$  yra statmens iš viršūnės  $C$  į tiesę  $AB$  pagrindas, o  $M$  – atkarpos  $AB$  vidurio taškas. Įrodykite, kad atkarpos  $MD$  ilgis yra lygus apie trikampį  $ABC$  apibrėžto apskritimo spinduliui.
3. Verslininkas Ramūnas padovanojo darželio vaikams 2000 balionų. Balionai buvo 20 skirtingų spalvų, po 100 kiekvienos spalvos. Darželio vedėja Austėja davė kiekvienam iš 100 darželį lankančių vaikų 20 balionų, bet neatsižvelgė į jų spalvą. Vaikai norėtų susikeisti balionais taip, kad kiekvienas iš jų turėtų po 20 skirtingų spalvų balionų. Austėja leidžia bet kuriems dviem vaikams susikeisti dviem balionais (kai jie paima vienas iš kito po vieną balioną), tačiau ne bet kaip, o tik kai kiekvienas iš jų turėtų imti iš kito tokios spalvos balioną, kurios jis prieš šiuos judviejų mainus neturi. Ar visada (kad ir kaip Austėja pradžioje būtų išdalinusi balionus) vaikai gali taip keistis balionais, kad po baigtinio skaičiaus tokių mainų kiekvienas iš jų turėtų po 20 skirtingų spalvų balionų?
4. Natūralusis skaičius  $m$  vadinamas *tvarkingu*, jei su bet kuriais natūraliaisiais skaičiais  $a$  ir  $b$  skaičius  $a^{2m} + b^{2m} + a^m b^m$  dalijasi iš  $a^2 + b^2 + ab$ .
- Įrodykite, kad skaičius 2 yra tvarkingas.
  - Ar skaičius 100 yra tvarkingas?
  - Ar skaičius 101 yra tvarkingas?
  - Raskite visus tvarkingus skaičius.