

59-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Trakai, 2010 03 30

11–12 klasės

1. Realieji skaičiai  $a$  ir  $b$  tenkina sąlygą

$$a^3 + b^3 = 8 - 6ab.$$

Kokias reikšmes gali įgyti  $a + b$ ?

2. Trikampio  $ABC$  pusiaukampinės kertasi taške  $S$ . Taškai  $A_1, B_1, C_1$  yra simetriški taškui  $S$  atitinkamai tiesių  $BC, AC$  ir  $AB$  atžvilgiu. Apie trikampį  $A_1B_1C_1$  apibrėžtas apskritimas eina per tašką  $B$ . Raskite kampą  $ABC$ .
3. Žaidimo lenta yra stačiakampis, kurio apatinė kraštinė lygi  $m$ , o šoninė –  $n$  ( $m$  ir  $n$  yra natūralieji skaičiai). Stačiakampis padalytas į vienetinius kvadratėlius. Kairiajame apatiniame langelyje stovi šaškė. Du žaidėjai daro ėjimus pakaitomis, ir kiekvienu ėjimu žaidėjas pastumia šaškę į kitą langelį: arba per kiek nori langelių į dešinę, arba per kiek nori langelių į viršų. Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali padaryti ėjimo. Nustatykite visas įmanomas natūraliųjų skaičių poras  $(m, n)$ , su kuriomis žaidimą pradedantis žaidėjas gali laimėti, kad ir kaip žaistų antrasis. Nurodykite, kaip jam reikėtų žaisti.
4. Sveikieji skaičiai nuo 1 iki 25 (nebūtinai įprastine tvarka) surašyti ratu. Apskaičiuojamos 25 sumos: pradedant kiekvienu skaičiumi sudedami 5 pagal laikrodžio rodyklę iš eilės einantys skaičiai. Randamos tų sumų dalybos iš 5 liekanos (t. y. vienas iš skaičių 0, 1, 2, 3 arba 4). Skirtingų liekanų skaičių pažymėkime  $d$ .
- a) Įrodykite, kad  $d$  gali būti lygus 1, 3, 4 arba 5.
- b) Įrodykite, kad  $d$  negali būti lygus 2.