Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Rajono (miesto) etapo užduočių 11 - 12 klasei sprendimai
2019 m.

1 uždavinys. Lentoje mažėjimo tvarka iš kairės į dešinę užrašyti skaičiai

$$1+\frac{1}{28},\quad 1+\frac{1}{29},\quad 1+\frac{1}{30},\quad \dots,\quad 1+\frac{1}{2019}$$

(t. y. k-tasis užrašytas skaičius lygus $1+\frac{1}{27+k}$). Vienu ėjimu leidžiama nutrinti kairiausiąjį ir dešiniausiąjį tuo metu lentoje užrašytus skaičius. Po kiekvieno tokio ėjimo apskaičiuojama lentoje užrašytų skaičių sandauga P.

a) Nustatykite, kokia bus P reikšmė po 4 ir po 228 ėjimų.

b) Kiek skirtingų natūraliųjų reikšmių bus įgijusi ši sandauga, prieš nutrinant paskutinius du skaičius?

Sprendimas. Po n ėjimų lentoje bus užrašyti skaičiai

$$1+\frac{1}{28+n},\quad \dots,\quad 1+\frac{1}{2019-n}.$$

Kadangi $1+\frac{1}{k}=\frac{k+1}{k}$, tai

$$P=\frac{(29+n)(30+n)\dots(2020-n)}{(28+n)(29+n)\dots(2019-n)}=\frac{2020-n}{28+n}.$$

a) Kai $n=4$, tai $P=\frac{2016}{32}=63$. Kai $n=228$, tai $P=\frac{1792}{256}=7$.

b) Reikia išsiaiškinti, kada $2020-n$ dalijasi iš $28+n$. Taip bus tada ir tik tada, kai $(2020-n)+(28+n)=2048=2^{11}$ dalijasi iš $28+n$. Vadinasi, $28+n$ yra dvejeto laipsnis. Tinka 5 reikšmės: $n=2^5-28=4$, $n=2^6-28=36$, $n=2^7-28=100$, $n=2^8-28=228$, $n=2^9-28=484$. O kitas skaičius $n=2^{10}-28=996$ jau per didelis, nes po tiek ėjimų visi $2019-27=1992=996\cdot 2$ skaičiai jau bus nutrinti.

Ats.: a) 63 ir 7; b) 5.

2 uždavinys. Natūralųjį skaičių vadinsime šiųmečiu, jei jo skaitmenų suma lygi 2019. Visus šiųmečius natūraliuosius skaičius išrikiuokime didėjimo tvarka:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

a) Raskite a_1 ir a_3.

b) Keliais nuliais baigiasi skaičius $a_{2019}+1$?

Sprendimas. Mažesni yra tie šiųmečiai skaičiai, kurie turi mažiau skaitmenų. Tarp šiųmečių skaičių, turinčių po lygiai skaitmenų, mažesni yra tie, kurių pirmasis skaitmuo mažesnis. Tarp šiųmečių skaičių, turinčių po lygiai skaitmenų ir tokį patį pirmąjį skaitmenį, mažesni yra tie, kurių antrasis skaitmuo mažesnis, ir t. t.

a) Iš $2019 > 9 \cdot 224$ išplaukia, kad šiųmetis skaičius turi daugiau nei 224 skaitmenis. Jei šiųmetis skaičius turi 225 skaitmenis, tai jo pirmasis skaitmuo yra ne mažesnis nei $2019 - 9 \cdot 224 = 3$. Be to, ši reikšmė pasiekiama, tik kai visi kiti 224 skaitmenys yra devynetai. Taip gauname $a_1 = 399\ldots99$.

Toliau turime ieškoti šiųmečių skaičių, turinčių 225 skaitmenis ir kurių pirmasis skaitmuo yra 4 (arba, jei tokių nėra, dar didesnių skaičių). Jų ieškokime taip: vietoj nežinomų 224 skaitmenų imkime devynetus (didžiausia galima skaitmens reikšmė) ir žiūrėkime, kaip juos galima sumažinti, kad skaitmenų suma taptų 2019. Skaičiuje $499\ldots99$, kurio skaitmenų suma yra 2020, reikia vieną iš skaitmenų sumažinti vienetu (pakeisti 9 į 8). Taip gautas skaičius tuo mažesnis, kuo toliau į kairę yra skaitmuo 8. Todėl $a_2 = 489\ldots99$, $a_3 = 498\ldots99$, ..., $a_{225} = 499\ldots98$.

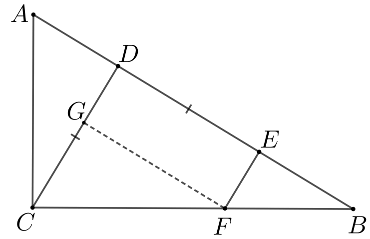
b) Iš a) dalies sprendimo išplaukia, kad toliau turime ieškoti šiųmečių skaičių, turinčių 225 skaitmenis ir kurių pirmasis skaitmuo yra 5. Skaičiaus $599\ldots99$ skaitmenų sumą 2021 reikia sumažinti 2: arba 9 pakeisti į 7, arba 9 ir 9 pakeisti į 8 ir 8.

Pirmiausiai eina skaičius $57\ldots$ ir 223 skaičiai $58\ldots$ (yra 223 būdai pasirinkti antrojo aštuoneto poziciją). Tada skaičius $597\ldots$ ir 222 skaičiai $598\ldots$, skaičius $5997\ldots$ ir 221 skaičius $5998\ldots$ Toliau atitinkamai eina $1 + 220$ skaičių (kurių 5-asis skaitmuo nėra 9), $1+219$ skaičių (6-asis skaitmuo nėra 9), $1+218$ skaičių (7-asis), $1+217$ skaičių (8-asis), $1 + 216$ skaičių (9-asis). Jau turime $225 + 224 + \ldots + 217 = 1989$ šiųmečius skaičius. Tada eina $a_{1990} = 5999999997\ldots$ ir 215 skaičių $5999999998\ldots$ Mums reikia $2019 - 1990 = 29$-ojo iš šių 215-os. Antrasis aštuonetas pirmajame iš 215 skaičių a_{1991} yra $10 + 1 = 11$-asis skaitmuo ir vis slenka per vieną poziciją į dešinę. Todėl 29-ajame skaičiuje antrasis aštuonetas yra $10 + 29 = 39$-asis skaitmuo, po kurio eina $225 - 39 = 186$ devynetai. Vadinasi, $a_{2019} + 1$ baigiasi 186 nuliais.

Ats.: a) $a_1 = 4 \cdot 10^{224} - 1 = 399\ldots99$, $a_3 = 499 \cdot 10^{222} - 1 = 49899\ldots99$; b) 186.

3 uždavinys. Stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB pažymėti tokie taškai D ir E, o statinyje BC – toks taškas F, kad atkarpos CD ir FE statmenos atkarpai AB ir $DE = CD$. Raskite kampą CAF.

Pirmas sprendimas. Išveskime statmenį FG iš taško F į atkarpą CD (žr. pav.).



Kadangi tiesės CD ir FE statmenos tiesei AB, tai jos lygiagrečios, o atstumas tarp jų yra bet kurio statmens, išvesto iš vienos tiesės į kitą, ilgis: $FG = ED$. Kadangi

$$\angle FCG = 90^\circ - \angle ACD = 90^\circ - (90^\circ - \angle CAD) = \angle CAD$$

ir $\angle ADC = 90^\circ = \angle CGF$, tai $\triangle ACD \sim \triangle CFG$. Be to, kadangi $FG = ED = CD$, tai trikampiai yra ne tik panašūs, bet ir lygūs. Vadinasi, $AC = CF$, o trikampis ACF yra statusis ir lygiašonis. Tokio trikmapio kampas CAF lygus 45°.

Antras sprendimas. Statieji trikampiai ACD ir FBE turi po bendrą smailųjį kampą su trikampiu ABC, todėl visi šie trikampiai turi tokius pačius kampus ir yra tarpusavyje panašūs. Kadangi $CD||FE$, tai pagal Talio teoremą $DE : CF = BE : BF$. Tada

$$DE : CF = BE : BF = CD : CA = DE : CA$$

ir $CF = CA$. Trikampis ACF statusis ir lygiašonis, jo kampas CAF lygus 45°.

Trečias sprendimas. Trikampis CDE yra statusis ir lygiašonis, todėl $\angle CED = 45^\circ$ ir $\angle CEF = 90^\circ - \angle CED = 45^\circ$. Kadangi $\angle ACF + \angle AEF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, tai apie keturkampį $ACFE$ galima apibrėžti apskritimą. Įbrėžtiniai kampai CAF ir CEF remiasi į tą patį to apskritimo lanką, ir $\angle CAF = \angle CEF = 45^\circ$.

Ats.: 45°.

4 uždavinys. Natūralųjį skaičių vadinsime suderintu, jei jis tenkina šias dvi sąlygas: 1) jo visi skaitmenys yra vienetai; 2) jis dalijasi tiek iš 11, tiek iš 41 su liekana 1, o iš 9 – su liekana 7.

a) Kiek skaitmenų turi mažiausias suderintas natūralusis skaičius?

b) Duota, kad kažkokių dviejų suderintų natūraliųjų skaičių skirtumas nesidalija iš natūraliojo skaičiaus $N > 35$. Kokios yra dvi mažiausios galimos N reikšmės?

Sprendimas. Skaičių, tenkinantį 1) sąlygą ir turintį n skaitmenų, pažymėkime U_n.

a) Remiantis 2) sąlyga, skaičius $U_n - 1 = 10U_{n-1}$ turi dalytis iš 11 ir iš 41. Taip bus, jei U_{n-1} dalijasi iš 11 ir iš 41.

Pastebėkime (pavyzdžiui, dalydami $111\ldots$ iš 41 kampu), kad U_1, U_2, U_3 ir U_4 iš 41 nesidalija, o $U_5 = 41 \cdot 271$ dalijasi. Jei natūralusis skaičius m dalijasi iš 5, tai $U_m = U_5 \cdot 100001\ldots00001$ dalijasi iš 41. Jei $m > 5$ dalijasi iš 5 su liekana $r \neq 0$, tai $U_m = \overline{U_{m-r}U_r} = U_{m-r} \cdot 10^r + U_r$, kur U_{m-r} iš 41 dalijasi, o U_r iš 41 nesidalija. Vadinasi, U_n dalijasi iš 41 su liekana 1 tada ir tik tada, kai $n-1$ dalijasi iš 5.

Remdamiesi panašia logika, bet paprasčiau gauname, kad U_n dalijasi iš 11 su liekana 1 tada ir tik tada, kai $n-1$ dalijasi iš 2. Panašiai galima ištirti ir dalumą iš 9. Remiantis dalumo iš 9 požymiu, U_m dalijasi iš 9, kai m dalijasi iš 9. Galima patikrinti, kad tarp skaičių $U_1, U_2, \ldots, U_8$ iš 9 su liekana 7 dalijasi tik U_7. Jei $m > 9$ dalijasi iš 9 su liekana $r \neq 0$, tai $U_m = \overline{U_{m-r}U_r} = U_{m-r} \cdot 10^r + U_r$, kur U_{m-r} dalijasi iš 9, o U_r dalijasi iš 9 su liekana 7, tik jei $r = 7$. Vietoj viso to galima pasinaudoti ir tokia išplėstine dalumo požymio formuluote: natūralusis skaičius dalijasi iš 9 su tokia liekana, su kuria iš 9 dalijasi jo skaitmenų suma. Bet kuriuo atveju jau galime performuluoti 2) sąlygą: $n-1$ turi dalytis iš 2 ir iš 5 be liekanos, o n – dalytis iš 9 su liekana 7.

Belieka rasti mažiausią n, tenkinantį pakeistąją 2) sąlygą. $n-1$ dalijasi iš 2 ir iš 5, kai dalijasi iš $2 \cdot 5 = 10$, t. y. kai n baigiasi vienetu. Tikrindami iš eilės skaičius 1, 11, 21, ..., randame mažiausią, kuris dalijasi iš 9 su liekana 7. Tai skaičius 61.

b) Du suderintus skaičius pažymėkime U_m ir U_n. Galime laikyti, kad $m > n$. Tada $A = U_m - U_n = U_{m-n} \cdot 10^n$ nesidalija iš N, bet dalijasi iš 11, 41 ir 9. Iš a) dalies sprendimo matome, kad $m - n$ turi dalytis iš 2, 5 ir 9, t. y. iš 90. Be to, $n \geqslant 61$. Tada A dalijasi iš 2, 4, 8, 5, 3 ir 9.

Tarkime, kad skaičius $p \neq 2, 3, 5$ yra pirminis. Iš Mažosios Ferma teoremos išplaukia, kad skaičius $9U_{p-1} = 10^{p-1} - 1$, todėl ir U_{p-1} dalijasi iš p. Jei k dalijasi iš $p-1$, tai U_k dalijasi iš U_{p-1}, todėl ir iš p. Kadangi $m - n$ dalijasi iš 6 ir 18, tai A dalijasi iš 7 ir 19. Galima patikrinti, kad U_6, todėl ir U_{m-n} bei A dalijasi iš 13. Analogiškai U_3, todėl ir A dalijasi iš 37. Taip pat gauname, kad U_{42} ir U_{84} dalijasi iš 43, o U_{22} ir U_{88} – iš 23.

Jau turime, kad A dalijasi iš $36 = 4 \cdot 9$, 37, $38 = 2 \cdot 19$, $39 = 3 \cdot 13$, $40 = 5 \cdot 8$, 41, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $44 = 4 \cdot 11$, $45 = 5 \cdot 9$. Taigi tarp 35 ir 47 lieka tik 2 natūralieji skaičiai, iš kurių A galimai nesidalija: 43 ir 46.

Remiantis a) dalies sprendimu, galima imti $n = 61$ ir $m = 90 + 61 = 151$. Tada $A = U_{90} \cdot 10^{61}$. Kadangi $U_6 = 111 \cdot 1001$ nesidalija iš 43, tai skaičiai $U_{90} = U_{84} \cdot 10^6 + U_6$ ir A nesidalija iš 43. Analogiškai skaičiai $U_{90} = U_{88} \cdot 100 + 11$ ir A nesidalija iš 23 nei iš 46.

Ats.: a) 61; b) 43 ir 46.

5 uždavinys. Raskite visus lygčių sistemos

$$\begin{cases} 2x + 3\{y\} = -4{,}5, \\ 6\{x\} + 7y = 8{,}9 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius (x, y).

Pastaba. Kiekvienam realiajam skaičiui a didžiausias sveikasis skaičius, neviršijantis a, vadinamas skaičiaus a sveikąja dalimi ir žymimas $[a]$, o skaičius $a - [a]$ vadinamas skaičiaus a trupmenine dalimi ir žymimas $\{a\}$.

Sprendimas. Iš sveikosios dalies apibrėžimo išplaukia, kad visada $[a] \leqslant a < [a] + 1$ ir todėl $0 \leqslant \{a\} < 1$. Pertvarkykime pirmąją sistemos lygtį:

$$2([x] + \{x\}) + 3\{y\} = -4{,}5, \qquad 2\{x\} + 3\{y\} = -4{,}5 - 2[x].$$

Kadangi $0 \leqslant 2\{x\}+3\{y\} < 2+3 = 5$, o skaičius $[x]$ sveikasis, tai gali tikti tik $[x] = -3$ arba -4. (Kitais atvejais $-4{,}5 - 2[x]$ reikšmė arba didesnė už 5, arba mažesnė už 0.) Atitinkamai $2\{x\} + 3\{y\} = 1{,}5$ arba $3{,}5$.

Analogiškai pertvarkome antrąją sistemos lygtį:

$$6\{x\} + 7\{y\} = 8{,}9 - 7[y].$$

Kadangi $0 \leqslant 6\{x\} + 7\{y\} < 6 + 7 = 13$, o skaičius $[y]$ sveikasis, tai gali tikti tik $[y] = 1$ arba 0. Atitinkamai $6\{x\} + 7\{y\} = 1{,}9$ arba $8{,}9$.

Pažymėkime $z = 2\{x\}+3\{y\}$, $t = 6\{x\}+7\{y\}$. Tada $3z-t = 2\{y\}$ ir $3t-7z = 4\{x\}$. Kai $t = 1{,}9$, tai $4\{x\} < 3 \cdot 2 - 7 \cdot 1 < 0$. Todėl lieka atvejis $t = 8{,}9$ ir $[y] = 0$. Jei $z = 1{,}5$, tai $2\{y\} = 4{,}5 - t < 0$. Lieka atvejis $z = 3{,}5$ ir $[x] = -4$. Randame

$$\{y\} = (3z - t) : 2 = (10{,}5 - 8{,}9) : 2 = 0{,}8, \qquad y = [y] + \{y\} = 0{,}8,$$

$$\{x\} = (z - 3\{y\}) : 2 = (3{,}5 - 2{,}4) : 2 = 0{,}55, \qquad x = [x] + \{x\} = -3{,}45.$$

Gautasis sprendinys tenkina pradinę sistemą.

Ats.: $(-3{,}45,\ 0{,}8)$.