Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Rajono (miesto) etapo užduočių 9 - 10 klasei sprendimai
2019 m.

1 uždavinys. Raminta ir Gerda pasiėmė po krūvelę monetų ir 20 kartų keitėsi monetomis. Pirmieji 10 apsikeitimų buvo tokie: Raminta Gerdai atiduodavo trečdalį tuo metu savo turimų monetų, o Gerda Ramintai atiduodavo du trečdalius tuo metu savo turimų monetų. Likusių 10 apsikeitimų metu Raminta Gerdai atiduodavo tris penktadalius tuo metu savo turimų monetų, o Gerda Ramintai – du penktadalius. Kaskart mergaitės atiduodavo viena kitai monetas tuo pačiu metu (o ne viena po kitos). Pabaigoje Raminta turėjo 72 monetas. Kiek monetų turėjo Gerda po penktojo apsikeitimo?

Sprendimas. Jei prieš bet kurį iš 10 pirmųjų apsikeitimų Raminta turėjo x monetų, o Gerda – y monetų, tai to apsikeitimo metu Raminta prarado $\frac{x}{3}$, o įgijo $\frac{2y}{3}$ monetų. Tada po apsikeitimo Raminta jau turėjo

$$x - \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} = \frac{2(x+y)}{3}$$

monetų. Analogiškai Gerda po apsikeitimo turėjo $\frac{x+y}{3}$ monetų. Ramintos ir Gerdos turimų monetų santykis tapo $2 : 1$. Analogiškai randama, kad po kiekvieno iš paskutiniųjų 10 apsikeitimų tas santykis buvo $2 : 3$. Vadinasi, pabaigoje Gerda turėjo $\frac{3}{2} \cdot 72 = 108$ monetas.

Iš viso monetų buvo $72 + 108 = 180$. Po penktojo apsikeitimo Raminta jų turėjo dvigubai daugiau nei Gerda, t. y. Raminta turėjo 2 iš $2 + 1 = 3$ dalių, o Gerda – vieną iš 3 dalių, trečdalį monetų. Vadinasi, po penktojo apsikeitimo Gerda turėjo $180 : 3 = 60$ monetų.

Pastaba. Iš sprendimo lengvai išplaukia, kad Raminta ir Gerda po kiekvieno iš pirmųjų 10 apsikeitimų vis turėdavo atitinkamai po 120 ir 60 monetų, o po kiekvieno iš paskutiniųjų 10 apsikeitimų – atitinkamai po 72 ir 108 monetas. O štai po kiek monetų jos turėjo pradžioje, nustatyti neįmanoma.

Ats.: 60.

2 uždavinys. Natūralųjį skaičių vadinsime *šiųmečiu*, jei jo skaitmenų suma lygi 2019. Visus šiųmečius natūraliuosius skaičius išrikiuokime didėjimo tvarka:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

a) Raskite a_1.

b) Keliais nuliais baigiasi skaičius $a_{100} + 1$?

Sprendimas. Mažesni yra tie šiųmečiai skaičiai, kurie turi mažiau skaitmenų. Tarp šiųmečių skaičių, turinčių po lygiai skaitmenų, mažesni yra tie, kurių pirmasis skaitmuo mažesnis. Tarp šiųmečių skaičių, turinčių po lygiai skaitmenų ir tokį patį pirmąjį skaitmenį, mažesni yra tie, kurių antrasis skaitmuo mažesnis, ir t. t.

a) Iš $2019 > 9 \cdot 224$ išplaukia, kad šiųmetis skaičius turi daugiau nei 224 skaitmenis. Jei šiųmetis skaičius turi 225 skaitmenis, tai jo pirmasis skaitmuo yra ne mažesnis nei $2019 - 9 \cdot 224 = 3$. Be to, ši reikšmė pasiekiama, tik kai visi kiti 224 skaitmenys yra devynetai. Taip gauname $a_1 = 399\ldots 99$.

b) Iš a) dalies sprendimo išplaukia, kad toliau turime ieškoti šiųmečių skaičių, turinčių 225 skaitmenis ir kurių pirmasis skaitmuo yra 4 (arba, jei tokių nėra, dar didesnių skaičių). Jų ieškokime taip: vietoj nežinomų 224 skaitmenų imkime devynetus (didžiausia galima skaitmens reikšmė) ir žiūrėkime, kaip juos galima sumažinti, kad skaitmenų suma taptų 2019. Skaičiuje $499\ldots 99$, kurio skaitmenų suma yra 2020, reikia vieną iš skaitmenų sumažinti vienetu (pakeisti 9 į 8). Taip gautas skaičius tuo mažesnis, kuo toliau į kairę yra skaitmuo 8. Todėl $a_2 = 489\ldots 99$, $a_3 = 498\ldots 99$, …, $a_{225} = 499\ldots 98$.

Skaičiuje a_{100} aštuonetas yra 100-asis skaitmuo, po kurio eina $225 - 100 = 125$ devynetai. Vadinasi, $a_{100} + 1 = 499\ldots 9900\ldots 00$ baigiasi 125 nuliais.

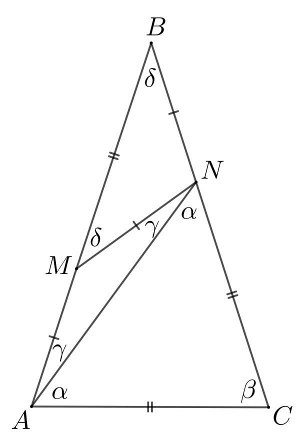
Ats.: a) $4 \cdot 10^{224} - 1 = 399\ldots 99$; b) 125.

3 uždavinys. Trikampio ABC kraštinės AB ir BC lygios. Jose atitinkamai pažymėti tokie taškai M ir N, kad $BN = NM = MA$ ir $BM = AC$. Raskite trikampio ABC kampus.

Sprendimas. Pastebėkime, kad

$$CN = BC - BN = AB - MA = BM = AC.$$

Todėl trikampis ACN lygiašonis – kaip ir trikampiai ABC, AMN, BNM. Šių keturių trikampių kampą prie pagrindo atitinkamai pažymėkime $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (žr. pav.). Dabar belieka pasinaudoti įvairiais elementariais sąryšiais tarp šių kampų.



Trikampyje ACN turime $\beta = \angle ACN = 180^\circ - 2\alpha$. Trikampyje ABC turime $\delta = \angle ABC = 180^\circ - 2\beta = 4\alpha - 180^\circ$. Trikampyje BNM turime $\angle BNM = 180^\circ - 2\delta = 540^\circ - 8\alpha$. Lygiašonio $\triangle ABC$ kampai BAC ir BCA lygūs: $\beta = \alpha + \gamma$ ir todėl $\gamma = \beta - \alpha = 180^\circ - 3\alpha$. Ištiestinį $\angle BNC$ sudaro trys kampai: $180^\circ = \alpha + \gamma + \angle BNM = 720^\circ - 10\alpha$. Vadinasi,

$$10\alpha = 540^\circ, \quad \alpha = 54^\circ, \quad \beta = 72^\circ, \quad \delta = 36^\circ.$$

Trikampio ABC kampai lygūs 72°, 72°, 36°.

Ats.: 72°, 72°, 36°.

4 uždavinys. Natūralųjį skaičių n vadinsime *uždvejinamu*, jei egzistuoja toks natūralusis skaičius a, kad skaičiaus $n \cdot a$ dešimčių (t. y. antrasis nuo galo) skaitmuo yra 2. Keli natūralieji skaičiai nuo 1 iki 999 **nėra** uždvejinami?

Sprendimas. Jei natūraliajam skaičiui n egzistuoja toks natūralusis skaičius b, kad $n \cdot b$ baigiasi skaitmeniu 2, tai n yra uždvejinamas: tereikia imti $a = 10b$, ir tada

$$n \cdot a = (n \cdot b) \cdot 10 = \ldots 2 \cdot 10 = \ldots 20.$$

Be to, jei skaičiui n egzistuoja toks b, tai ir skaičius $10n$ yra uždvejinamas: jam tereikia imti $a = b$, ir vėl $10n \cdot a = 10nb = \ldots 20$.

Skaičiaus b ieškoti yra paprasčiau nei sąlygoje nurodyto skaičiaus a, nes natūraliųjų skaičių sandaugos paskutinis skaitmuo priklauso tik nuo dauginamųjų paskutinių skaitmenų. Pavyzdžiui, padauginus skaičių, kuris baigiasi skaitmeniu 3, iš 4, sandauga visada baigiasi skaitmeniu 2, nes $3 \cdot 4 = 12$. Dėl to visi natūralieji skaičiai, kurie baigiasi skaitmeniu 3, yra uždvejinami. Dėl mūsų pastebėjimo apie skaičių $10n$ uždvejinami yra ir skaičiai, kurie baigiasi skaitmenimis 30. Analogiškai lygybės

$$1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = 2, \quad 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12, \quad 6 \cdot 7 = 7 \cdot 6 = 42, \quad 8 \cdot 9 = 9 \cdot 8 = 72$$

parodo, kad reikiamas b egzistuoja visiems natūraliesiems skaičiams, kurie baigiasi skaitmeniu 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9: atitinkamai galima imti $b = 2, 1, 4, 3, 7, 6, 9, 8$. Vadinasi, visi natūralieji skaičiai, kurie nesibaigia skaitmeniu 0 arba 5, yra uždvejinami. Taip pat dėl to visi skaičiai, kurie baigiasi nuliu, bet ne skaitmenimis 50 arba 00, yra uždvejinami.

Jei $n = \ldots 5$, tai n nelyginis ir dalijasi iš 5. Tada skaičius $5n$ nelyginis ir dalijasi iš 25. Skaičiai, kurie dalijasi iš 25, baigiasi skaitmenimis 25, 50, 75 arba 00. Todėl $5n = \ldots 25$ arba $5n = \ldots 75$. Antruoju atveju

$$15n = 5n + 5n + 5n = \ldots 75 + \ldots 75 + \ldots 75 = \ldots 25.$$

Taigi bet kuris $n = \ldots 5$ yra uždvejinamas: galime imti $a = 5$ arba $a = 15$.

Mums liko skaičiai, kurie baigiasi skaitmenimis 50 arba 00, t. y. skaičiai, kurie dalijasi iš 50. Jei n dalijasi iš 50, tai ir $n \cdot a$ dalijasi iš 50 (bet kokiam natūraliajam a). Bet tada $n \cdot a = \ldots 50$ arba $\ldots 00$, t. y. dešimčių skaitmuo lygus 0 arba 5, bet niekada 2. Vadinasi, skaičius n nėra uždvejinamas tada ir tik tada, kai dalijasi iš 50.

Nuo 1 iki 999 yra 19 skaičių, kurie dalijasi iš 50: tai $50, 100, 150, \ldots, 900, 950 = 50 \cdot 19$.

Ats.: 19.

5 uždavinys. Raskite visus lygčių sistemos

$$\begin{cases} 2x + 3\{y\} = -4{,}5, \\ 6\{x\} + 7y = 8{,}9 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius (x, y).

Pastaba. Kiekvienam realiajam skaičiui a didžiausias sveikasis skaičius, neviršijantis a, vadinamas skaičiaus a sveikąja dalimi ir žymimas $[a]$, o skaičius $a - [a]$ vadinamas skaičiaus a trupmenine dalimi ir žymimas $\{a\}$.

Sprendimas. Iš sveikosios dalies apibrėžimo išplaukia, kad visada $[a] \leqslant a < [a] + 1$ ir todėl $0 \leqslant \{a\} < 1$. Pertvarkykime pirmąją sistemos lygtį:

$$2([x] + \{x\}) + 3\{y\} = -4{,}5, \qquad 2\{x\} + 3\{y\} = -4{,}5 - 2[x].$$

Kadangi $0 \leqslant 2\{x\} + 3\{y\} < 2 + 3 = 5$, o skaičius $[x]$ sveikasis, tai gali tikti tik $[x] = -3$ arba -4. (Kitais atvejais $-4{,}5 - 2[x]$ reikšmė arba didesnė už 5, arba mažesnė už 0.) Atitinkamai $2\{x\} + 3\{y\} = 1{,}5$ arba $3{,}5$.

Analogiškai pertvarkome antrąją sistemos lygtį:

$$6\{x\} + 7\{y\} = 8{,}9 - 7[y].$$

Kadangi $0 \leqslant 6\{x\} + 7\{y\} < 6 + 7 = 13$, o skaičius $[y]$ sveikasis, tai gali tikti tik $[y] = 1$ arba 0. Atitinkamai $6\{x\} + 7\{y\} = 1{,}9$ arba $8{,}9$.

Pažymėkime $z = 2\{x\} + 3\{y\}$, $t = 6\{x\} + 7\{y\}$. Tada $3z - t = 2\{y\}$ ir $3t - 7z = 4\{x\}$. Kai $t = 1{,}9$, tai $4\{x\} < 3 \cdot 2 - 7 \cdot 1 < 0$. Todėl lieka atvejis $t = 8{,}9$ ir $[y] = 0$. Jei $z = 1{,}5$, tai $2\{y\} = 4{,}5 - t < 0$. Lieka atvejis $z = 3{,}5$ ir $[x] = -4$. Randame

$$\{y\} = (3z - t) : 2 = (10{,}5 - 8{,}9) : 2 = 0{,}8, \qquad y = [y] + \{y\} = 0{,}8,$$

$$\{x\} = (z - 3\{y\}) : 2 = (3{,}5 - 2{,}4) : 2 = 0{,}55, \qquad x = [x] + \{x\} = -3{,}45.$$

Gautasis sprendinys tenkina pradinę sistemą.

Ats.: $(-3{,}45,\ 0{,}8)$.