Lietuvos mokinių šešioliktoji astronomijos olimpiada
Antrasis etapas
XI-XII klasių mokiniai

1 uždavinys (10 taškų)

Dirbtinis Marso palydovas (DMP), judantis areostacionariąja orbita, Marse esančiam stebėtojui bus matomas kaip nejudantis objektas Marso vietinio horizonto atžvilgiu. Paaiškinkite, kokia tai būtų orbita. Apskaičiuokite, koks turėtų būti areostacionariosios orbitos aukštis virš Marso paviršiaus. Marso duomenys: masė $6{,}42\times10^{23}$ kg, pusiaujinis spindulys 3397 km, apsisukimo apie ašį periodas 88643 s.

Sprendimas

Areostacionarioji orbita yra tokia apskritiminė orbita, kurios plokštuma sutampa su Marso pusiaujo plokštuma. Šios orbitos aukštis turi būti toks, kad DMP orbitinis periodas būtų lygus Marso apsisukimo apie ašį periodui. Be to, DMP turi judėti Marso sukimosi apie ašį kryptimi.

DMP judėjimo apskritimine orbita sąlyga: DMP veikianti įcentrinė jėga turi būti lygi gravitacijos jėgai.

$$\boldsymbol{G\frac{M_M m_{DMP}}{r^2} = \frac{m_{DMP}v^2}{r}}$$

Čia G – gravitacijos konstanta, M_M – Marso masė, m_{MDP} – dirbtinio Marso palydovo masė, r – atstumas tarp Marso ir DMP masių centrų, v – DMP linijinis greitis orbitoje.

Panaudojame linijinio greičio ir orbitinio periodo sąryšį:

$$v = \frac{2\pi}{P}r$$

Ir gauname:

$$r^3 = \frac{GM_M P^2}{4\pi^2}$$

$$\boldsymbol{r = \sqrt[3]{\frac{GM_M P^2}{4\pi^2}}}$$

Apskaičiuojame

$$r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times6{,}42\times10^{23}\times88643^2}{4\times\pi^2}} = 20426628\ \text{m} \approx 20427\ \text{km}$$

Orbitos aukštis virš Marso paviršiaus

$$\boldsymbol{h_o = r - R_M}$$

Čia R_M – Marso pusiaujinis spindulys.

$$h_o = 20427 - 3397 = 17030\ \text{km}$$

Atsakymas: **17030 km.**

<u>2 uždavinys</u> (15 taškų)

Analizuojant padrikojo spiečiaus žvaigždžių fotometrinius duomenis ir pasitelkiant žvaigždžių evoliucijos modelius galima nustatyti spiečiaus atstumą bei amžių. Šiam tikslui pasiekti spiečiaus žvaigždžių ryškio-spalvos diagrama (Hercšprungo ir Reselo diagramos analogas) lyginama su kalibruota absoliučiojo ryškio – spalvos diagrama. Spiečiaus atstumo modulis įvertinamas pagal spiečiaus žvaigždžių pagrindinės sekos vertikalų poslinkį iki sutapatinimo su žvaigždžių nulinio amžiaus pagrindine seka kalibruotoje diagramoje. Tokiu būdu sutapatinus sekas taip pat nustatomas spiečiaus pagrindinės sekos posūkio taškas, t. y. mažiausio šviesio žvaigždės, evoliucijos eigoje jau atitolusios nuo pagrindinės sekos, absoliutusis ryškis, kuris panaudojamas spiečiaus amžiui apskaičiuoti remiantis žvaigždžių evoliucijos modeliu.

Šiam uždaviniui 2.1 lentelėje pateikti vieno padrikojo spiečiaus žvaigždžių ryškių *V* ir spalvų (spalvos rodiklių) (*B*–*V*) fotometriniai matavimai. Tarpžvaigždinė ekstinkcija iki spiečiaus atstumo nereikšminga, nes spiečius yra gana arti Saulės sistemos.

Kalibruotoji diagrama M_V, $(B–V)_0$, kurioje išbrėžta žvaigždžių nulinio amžiaus pagrindinė seka, pateikta 2.1 pav. Šios diagramos plotas ordinatės kryptimi yra išplėstas tiek, kad joje būtų galima atidėti ir spiečiaus žvaigždžių matavimus.

<u>Užduotys</u>

a) 2.1 pav. diagramoje atidėkite spiečiaus žvaigždes (2.1 lentelės duomenys). Įvertinkite spiečiaus atstumo modulį.

b) Naudodami šį atstumo modulį apskaičiuokite spiečiaus žvaigždžių absoliučiuosius ryškius, surašykite juos į lentelę ir atidėkite 2.1 pav. diagramoje. Atkreipkite dėmesį, ar tikrai spiečiaus pagrindinės sekos žvaigždės išsidėsto simetriškai abipus kalibruotos nulinio amžiaus pagrindinės sekos. Jei ne, tai atitinkamai pakoreguokite atstumo modulį ir absoliučiųjų ryškių skaičiavimus atlikite iš naujo.

c) Apskaičiuokite spiečiaus atstumą parsekais.

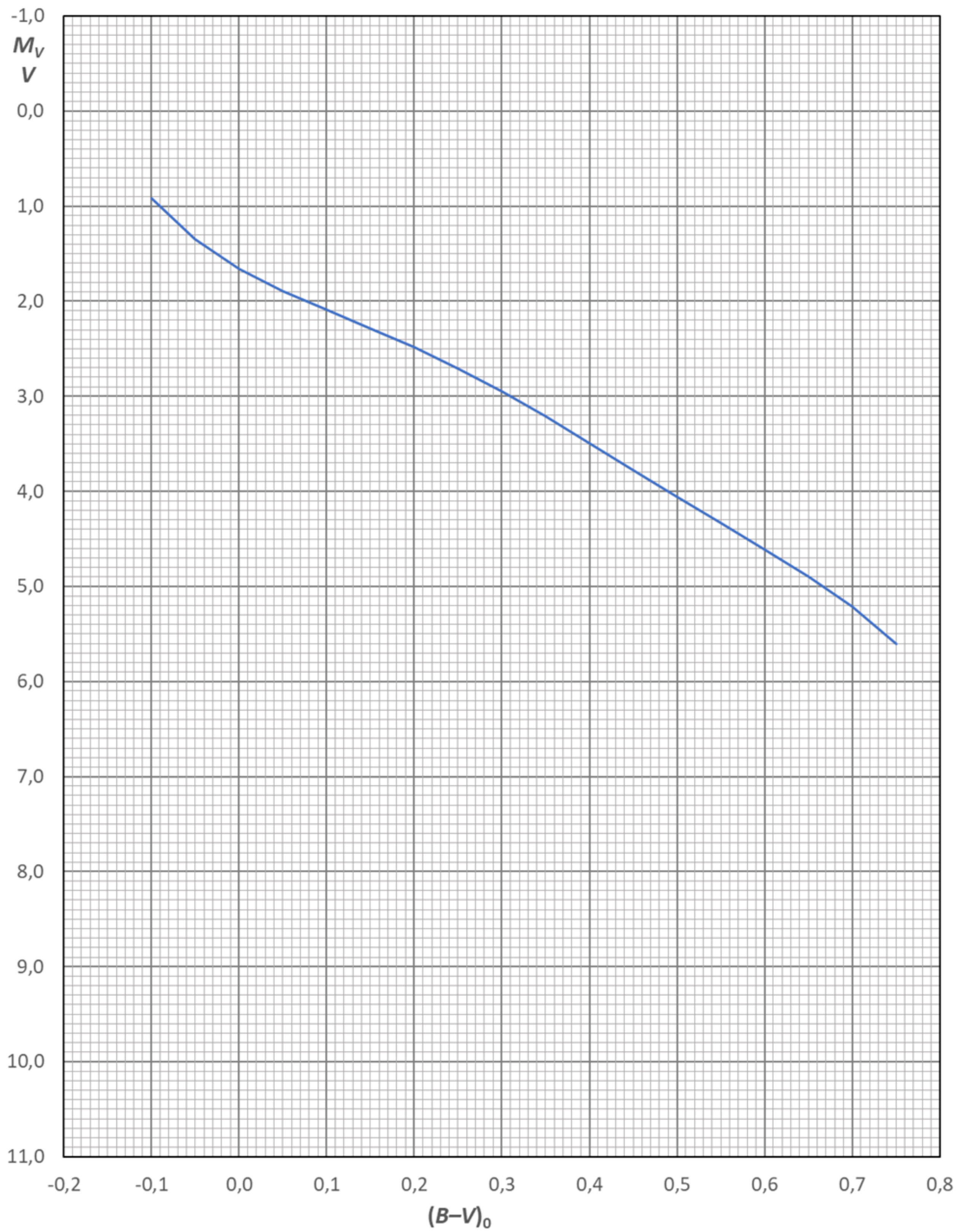
d) Gautoje spiečiaus diagramoje nustatykite spiečiaus pagrindinės sekos posūkio taško absoliutųjį ryškį. Spiečiaus amžiui apskaičiuoti naudokite sąryšį tarp šio absoliučiojo ryškio ir amžiaus (išreikšto metais) logaritmo:

$$\log \tau = 8{,}226 + 0{,}4575 M_V$$

(Ši formulė taikytina ryškių intervalui $|M_V| \leq 2$.)

2.1 lentelė. Spiečiaus fotometriniai duomenys

Nr.	B-V	V		
1	-0,05	5,25		
2	-0,02	5,68		
3	0,05	6,30		
4	0,08	5,15		
5	0,08	4,95		
6	0,11	6,80		
7	0,17	7,10		
8	0,19	6,90		
9	0,25	4,92		
10	0,28	7,42		
11	0,37	7,89		
12	0,40	8,14		
13	0,46	8,35		
14	0,48	8,55		
15	0,50	8,55		
16	0,51	8,74		
17	0,56	9,07		
18	0,58	9,02		
19	0,61	9,32		
20	0,67	9,65		



2.1 pav. ***V*****,** ***B-V*** **diagrama. Mėlyna linija žymi nulinio amžiaus pagrindinę seką**

Sprendimas

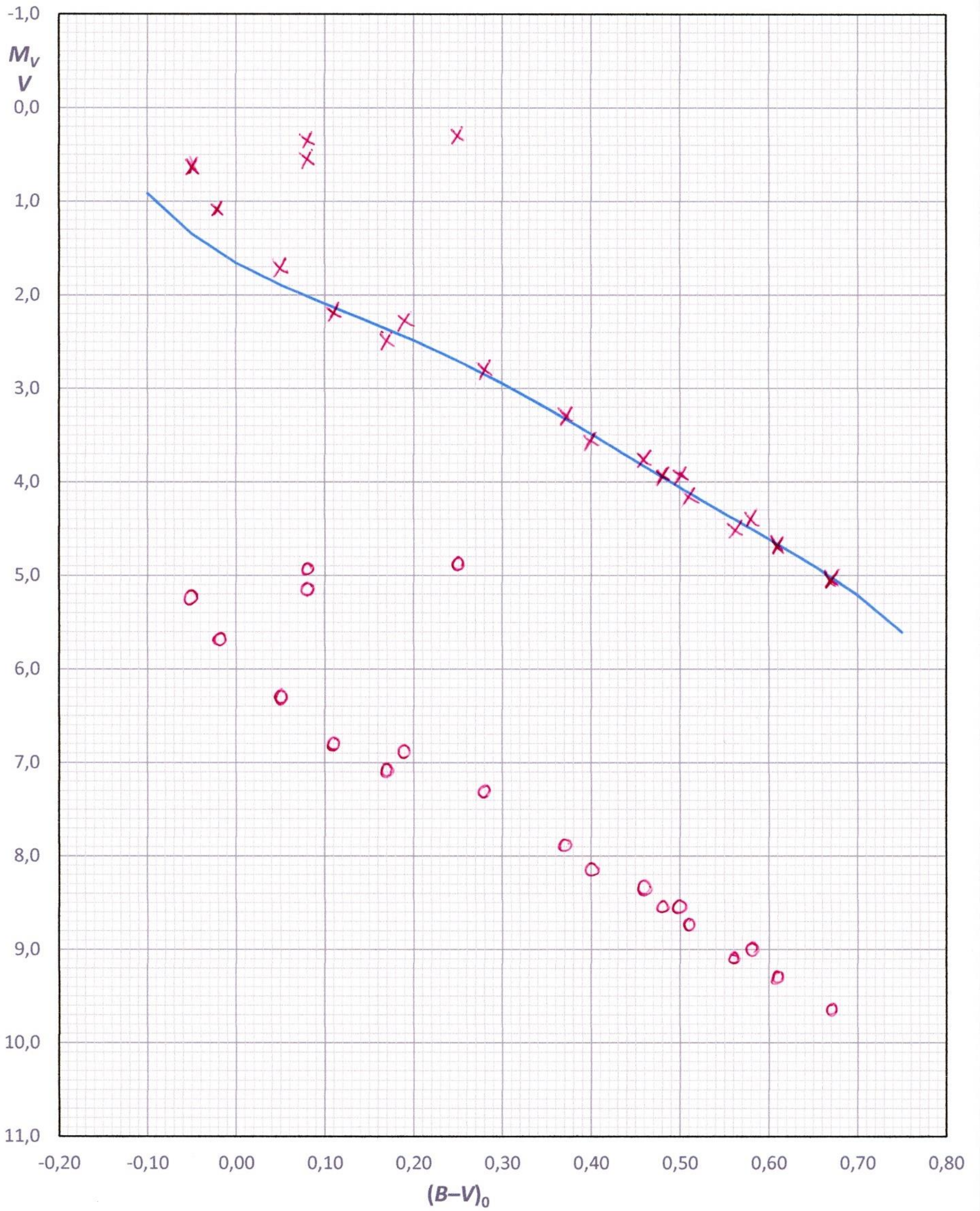
a) 2.1 pav. diagramoje atidedame spiečiaus žvaigždes, panaudodami 2.1 lentelės duomenis. Šioje diagramoje įvertiname poslinkio dydį, kuriuo reikia perstumti ordinatės kryptimi spiečiaus žvaigždžių pagrindinę seką, kad ji sutaptų su kalibruotąja pagrindine seka. (Atkreipiame dėmesį, kad viršutinėje diagramos dalyje esančios 5 didžiausio šviesio žvaigždės jau yra nukrypusios nuo nulinio amžiaus pagrindinės sekos, todėl į jas neatsižvelgiama vertinant atstumo modulį.) Gauname, kad šis poslinkis lygus $V - M_V = 4{,}6$. Tai ir yra spiečiaus atstumo modulis.

b) Panaudodami šį modulį apskaičiuojame spiečiaus žvaigždžių absoliučiuosius ryškius. Jų vertės surašytos 2.1a lentelės trečiame stulpelyje.

2.1a lentelė

Nr.	***B-V***	***V***	$V - 4{,}6$	
1	-0,05	5,25	0,65	
2	-0,02	5,68	1,08	
3	0,05	6,30	1,70	
4	0,08	5,15	0,55	
5	0,08	4,95	0,35	
6	0,11	6,80	2,20	
7	0,17	7,10	2,50	
8	0,19	6,90	2,30	
9	0,25	4,92	0,32	
10	0,28	7,42	2,82	
11	0,37	7,89	3,29	
12	0,40	8,14	3,54	
13	0,46	8,35	3,75	
14	0,48	8,55	3,95	
15	0,50	8,55	3,95	
16	0,51	8,74	4,14	
17	0,56	9,07	4,47	
18	0,58	9,02	4,42	
19	0,61	9,32	4,72	
20	0,67	9,65	5,05	

Šias vertes taip pat atidedame 2.1 pav. Jei atstumo modulis buvo įvertintas teisingai, tai šios vertės išsidėsto simetriškai abipus kalibruotos pagrindinės sekos. Galutinė diagrama parodyta 2.1a pav. Spiečiaus žvaigždės išsidėsto maždaug simetriškai abipus nulinio amžiaus sekos, neskaitant viršutinių 5 žvaigždžių, kurios dėl evoliucijos jau yra atitolusios nuo šios sekos.



2.1a pav. *V*, *B-V* diagrama su spiečiaus žvaigždėmis

c) Spiečiaus atstumas parsekais:

$$r = 10^{0,2(V-M_V)+1} = 10^{0,2\times 4,6+1} = 83\ \text{pc.}$$

d) 2.1a pav. diagramoje matome, kad 5 didžiausio šviesio žvaigždes jau yra atitolusios nuo pagrindinės sekos. Mažiausią šviesį iš jų turi 2-oji žvaigždė, kurios absoliutusis ryškis 1,08. Tariame, kad ši žvaigždė ir žymi posūkio tašką. Panaudodami šią vertę ir apskaičiuojame spiečiaus amžių:

$$\boldsymbol{\log\tau = 8,226 + 0,4575 \times 1,08 = 8,72}$$

$$\tau = 525 \times 10^{6} \text{ metų}$$

<u>Atsakymas:</u>

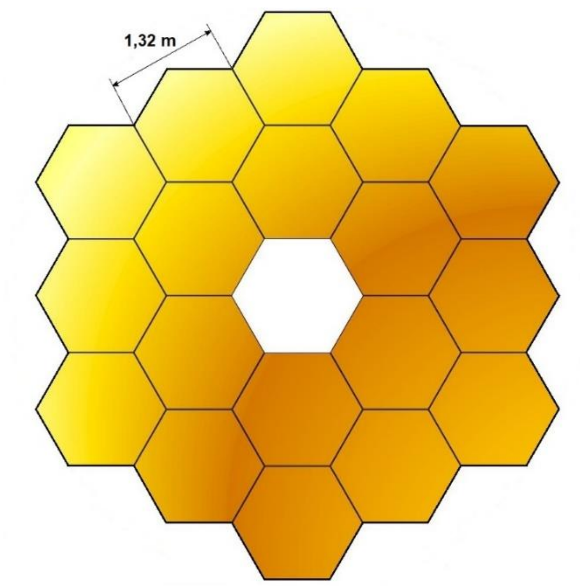
a) Spiečiaus atstumo modulis 4,6

b) Žvaigždžių absoliutieji ryškiai 2.1a lentelėje ir 2.1a pav.

c) Spiečiaus atstumas 83 pc.

d) Spiečiaus amžius 525 milijonai metų.

<u>3 uždavinys</u> (10 taškų)



2020 m. bus paleistas Džeimso Vebo kosminis teleskopas (*James Webb Space Telescope* – JWST), kuris pakeis dabar skriejantį Hablo kosminį teleskopą (*Hubble Space Telescope* – HST). Primename, kad HST pagrindinis veidrodis yra 2,4 m skersmens vientisas skritulio formos hiperboloidinis veidrodis su centrine 0,6 m skersmens kiauryme. JWST pagrindinį veidrodį sudaro 18 šešiakampių veidrodžių mozaika su centrine šešiakampe kiauryme, kurios matmenys tokie patys, kaip ir mozaikos veidrodžių (žr. pav. kairėje). Mozaikos kiekvieno veidrodžio skersmuo, išmatuotas skersai kraštinių, lygus 1,32 m. Tinkamai suderinta ši veidrodžių sistema veikia kaip vientisas veidrodis. Naudojant papildomus veidrodžius sukuriama optinė sistema, kurios ekvivalentinio židinio nuotolis 131,4 m. Teleskopas pritaikytas tyrinėti astronominių objektų spinduliuotę 0,6 – 28,5 μm bangų ilgių intervale. Šio uždavinio užduotyse, kur tai bus reikalinga, naudokite 2 μm bangos ilgį. Atsakymai į užduočių klausimus turi būti pagrįsti atitinkamais skaičiavimais.

<u>Užduotys:</u>

a) Apskaičiuokite HST ir JWST kampines skiriamąsias gebas (kampinėmis sekundėmis) ir jas palyginkite.

b) Apskaičiuokite taškinio šaltinio (žvaigždės atvaizdo) linijinį skersmenį mm JWST židinio plokštumoje.

c) Apskaičiuokite, kokiame didžiausiame nuotolyje nuo Saulės galima tikėtis „pastebėti“ (išskirti) egzoplanetas, skriejančias apie savo žvaigždes 1 av nuotolyje. Tarkime, kad JWST yra atitinkamas įtaisas centrinės žvaigždės spindesiui visai nuslopinti.

d) Raskite, kokio ribinio ryškio objektus bus galima stebėti su JWST, jei žinoma, kad su HST stebimų objektų ribinis ryškis siekia 28,0. Tarkime, kad būtų naudojami analogiški metodai ir spinduliuotės detektoriai.

Sprendimas

a) HST ir JWST kampinės skyros

Teleskopo teorinė kampinė skyra (išreikšta radianais) lygi

$$\boldsymbol{\psi = 1,22\frac{\lambda}{D}}$$

Čia λ – bangos ilgis, D – teleskopo objektyvo skersmuo.

HST skyrą apskaičiuoti paprasta, nes sąlygoje yra visi reikalingi duomenys:

$$\psi_H = 1,22\frac{2 \times 10^{-6}}{2,4} = 1,02 \times 10^{-6}\ \mathrm{rad} = 0,21''$$

JWST skyrai apskaičiuoti reikia rasti visos teleskopo veidrodžio mozaikos skersmenį. Iš sąlygoje pateikto brėžinio matome, kad

$$D_J = 5 \times 1,32 = 6,6\ \mathrm{m}$$

Tuomet

$$\psi_J = 1,22\frac{2 \times 10^{-6}}{6,6} = 3,70 \times 10^{-7}\ \mathrm{rad} = 0,076''$$

Kampinių skyrų santykis:

$$\boldsymbol{\frac{\psi_H}{\psi_J} = \frac{1,02 \times 10^{-6}}{3,70 \times 10^{-7}} \approx 2,8}$$

b) Taškinio šaltinio (žvaigždės atvaizdo) linijinis skersmuo JWST židinio plokštumoje

Šį skersmenį apskaičiuojame pritaikę mažų kampų formulę:

$$\boldsymbol{\delta = f2\psi}$$

Čia f – teleskopo ekvivalentinis židinio nuotolis, 2ψ – kampinis taškinio šaltinio (difrakcinio) atvaizdo skersmuo, išreikštas radianais.

Skaičiuojame:

$$\delta_J = 131400 \times 2 \times 3,70 \times 10^{-7} \approx 0,1\ \mathrm{mm}$$

c) Didžiausias nuotolis, kuriame dar galima „išskirti“ egzoplanetą, esančią 1 av nuotolyje nuo žvaigždės

Mažiausias kampinis atstumas tarp žvaigždės ir egzoplanetos turėtų būti ne mažesnis kaip kampinis taškinio šaltinio (difrakcinio) atvaizdo skersmuo. Šiuo atveju $2\psi_J = 2 \times 0,076 \approx 0,15''$. Kita vertus, remiantis paralakso apibrėžimu, tai yra žvaigždės paralaksas. Vadinasi, ribinis atstumas lygus

$$\boldsymbol{r_m = \frac{1}{0,15} = 6,6\ \mathrm{pc}}$$

d) JWST ribinis ryškis

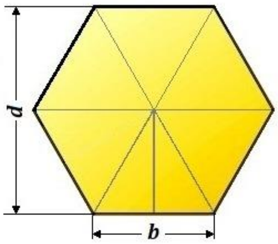
Duotam spinduliuotės detektoriui ribinį ryškį lemia teleskopo pagrindinio veidrodžio plotas, kuris surenka spinduliuotę (efektinis plotas). HST pagrindinio veidrodžio efektinis plotas lygus

$$S_H = \pi(R_H^2 - R_{Hc}^2)$$

Čia R_H – HST pagrindinio veidrodžio spindulys, R_{Hc} – HST pagrindinio veidrodžio centrinės kiaurymės spindulys.

Apskaičiuojame

$$S_H = \pi(1,2^2 - 0,3^2) = 4,24\ \mathrm{m}^2$$



JWST pagrindinio veidrodžio plotas skaičiuojamas sudėtingiau. Pirma reikia apskaičiuoti mozaikos šešiakampio veidrodžio plotą. Šio šešiakampio plotą padalijame į 6 lygiakraščius trikampius (žr. pav. kairėje). Gauto trikampio aukštinė $h = d/2$. Trikampio kraštinė apskaičiuojama remiantis Pitagoro teorema:

$$b = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Trikampio plotas

$$S_{tr} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\frac{d}{\sqrt{3}}\frac{d}{2} = \frac{d^2}{4\sqrt{3}} = \frac{1{,}32^2}{4\sqrt{3}} = 0{,}2515\ \mathrm{m}^2$$

Šešiakampio veidrodžio plotas

$$S_{ss} = 6S_{tr} = 6 \times 0{,}2515 = 1{,}509\ \mathrm{m}^2$$

JWST pagrindinio veidrodžio plotas

$$S_J = 18S_{ss} = 18 \times 1{,}509 = 27{,}16\ \mathrm{m}^2$$

JWST ribinis ryškis

$$\boldsymbol{m_J = m_H + 2,5\log\frac{S_J}{S_H} = 28,0 + 2,5\log\frac{27,16}{4,24} = 30,0}$$

Atsakymas:

a) HST kampinė skyra 0,21″, JWST – 0,076″; Jų santykis – 2,8.

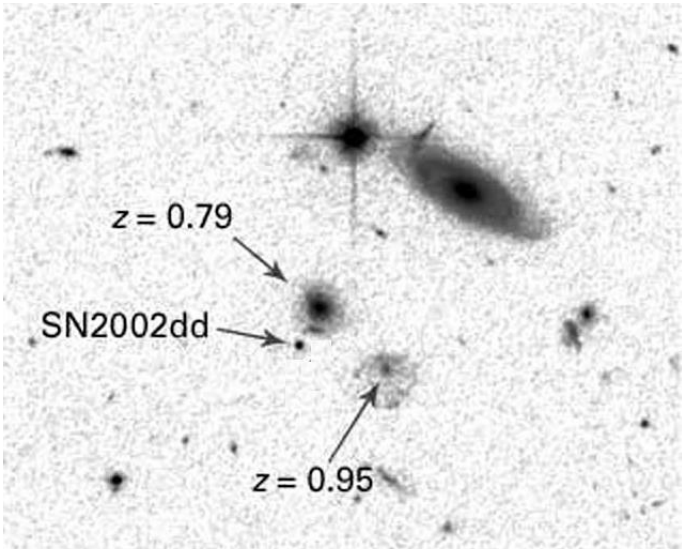
b) Taškinio šaltinio atvaizdo skersmuo 0,1 mm.

c) Didžiausias nuotolis 6,6 pc.

d) JWST ribinis ryškis 30.

4 uždavinys (Supernova) (VD) (10t)

2002 metais astronomai stebėjo Ia tipo supernovą SN2002dd, kurios aplinka pavaizduota 4.1 pav. nuotraukoje. Šioje nuotraukoje taip pat pažymėtos dvi galaktikos su duotais raudonojo poslinkio faktoriais. Supernovos spindesio kreivė *B* juostoje pateikta 4.2 pav. Tarpžvaigždinė ekstinkcija supernovos kryptimi $A_B = 0{,}15$.



4.1 pav. Supernovos SN2002dd aplinka. Nuotraukoje pažymėtos dvi galaktikos su nurodytais raudonojo poslinkio faktoriais

Užduotys:

a) Iš supernovos spindesio kreivės (4.2 pav.) nustatykite jos absoliutųjį ryškį $\boldsymbol{M_B}$ spindesio maksimume. Absoliutųjį ryškį skaičiuokite remdamiesi priklausomybe:

$$M_B = -19{,}32 + 0{,}64(\Delta m_{15} - 1{,}1).$$

Čia Δm_{15} yra supernovos regimojo ryškio *B*, išmatuoto, praėjus 15-ai dienų po supernovos spindesio maksimumo momento, ir jos regimojo ryškio spindesio maksimume skirtumas.

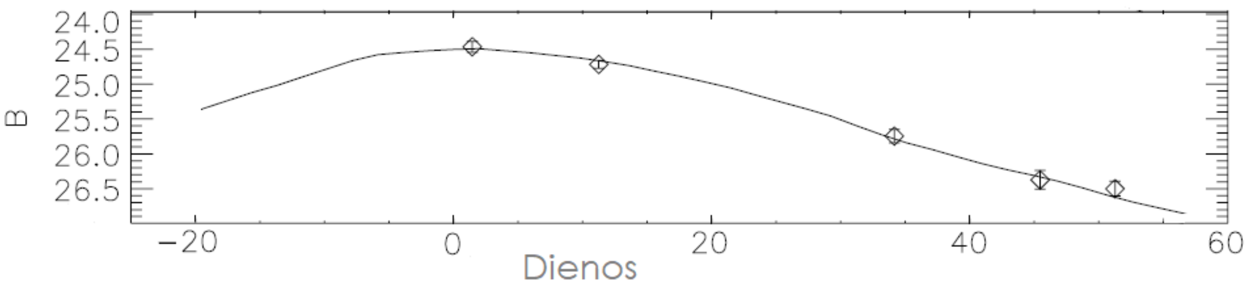
b) Raskite supernovos atstumą Mpc.

c) Nustatykite, ar ši supernova yra arčiau 4.1 pav. pažymėtų galaktikų, ar toliau, ar šalia kurios nors iš jų.

Hablo konstanta $H = 72\ \text{km} \cdot s^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$.

Naudokite Hablo dėsnio variantą, kuriame atsižvelgiama į Visatos plėtimosi spartos kitimą:

$$r = \frac{cz}{H}(1 + 0{,}8z)$$



4.2 pav. Supernovos SN2002dd spindesio kitimo kreivė

Sprendimas

a) Supernovos absoliutusis ryšis spindesio maksimume

Iš 4.2 pav. nustatome, kad $\Delta m_{15} = 0{,}3$. Tuomet

$$\boldsymbol{M_B = -19,32 + 0,64(0,3 - 1,1) = -19,83}$$

b) Supernovos atstumo skaičiavimas

Atstumo modulis

$$\mu = B - M_B - A_B = 24{,}5 + 19{,}83 - 0{,}15 = 44{,}2$$

Atstumas

$$\boldsymbol{r = 10^{0,2(\mu+5)} = 6918\ \text{Mpc}}$$

c) Nustatykite, ar ši supernova yra arčiau 4.1 pav. pažymėtų galaktikų, ar toliau

1 variantas.

Pagal duotą Hablo dėsnio formulę apskaičiuojame 4.1 pav. pažymėtų galaktikų atstumus:

$$r_{79} = \frac{3 \times 10^5 \times 0{,}79}{72}(1 + 0{,}8 \times 0{,}79) = 5372 \text{ Mpc}$$

$$r_{95} = \frac{3 \times 10^5 \times 0{,}95}{72}(1 + 0{,}8 \times 0{,}95) = 6967 \text{ Mpc}$$

Matome, kad galaktikos, kurios $z = 0{,}95$, atstumas praktiškai nesiskiria nuo supernovos atstumo (nepamirškime atstumų nustatymo paklaidų) ir galime daryti išvadą, kad jos yra vienodame nuotolyje.

2 variantas.

Panaudojame duotą Hablo dėsnio formulę supernovos raudonojo poslinkio rodikliui apskaičiuoti:

$$0{,}8z^2 + z - \frac{rH}{c} = 0$$

$$0{,}8z^2 + z - \frac{6918 \times 72}{3 \times 10^5} = 0$$

$$0{,}8z^2 + z - 1{,}66 = 0$$

Sprendžiame šią kvadratinę lygtį. Pasirenkame teigiamą sprendinio vertę, nes z turi būti teigiamas:

$$\boldsymbol{z = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \times 0{,}8 \times 1{,}66}}{2 \times 0{,}8} = 0{,}94}$$

Gautas supernovos z praktiškai toks pat, kaip 4.1 pav. pažymėtos galaktikos, kurios $z = 0{,}95$. Išvada: Supernova ir galaktika yra vienodame nuotolyje.

Atsakymas

a) Supernovos absoliutusis ryškis $\boldsymbol{M_B = -19{,}83}$

b) Supernovos atstumas 6918 Mpc

c) Galaktika, kurios $\boldsymbol{z = 0{,}95}$, ir supernovos $\boldsymbol{z = 0{,}94}$ praktiškai vienodi ir galima teigti, kad abu šie objektai yra tame pačiame nuotolyje.

<u>5 uždavinys</u> (20 taškų)

Juodosios skylės yra erdvės dalis, iš kurios negali ištrūkti netgi šviesa. Tačiau žymusis fizikas teoretikas Stivenas Hokingas įrodė, kad juodosios skylės gali „išgaruoti“ jo vardu pavadinto spinduliavimo būdu.

Juodosios skylės yra vieni iš paprasčiausių objektų Visatoje. Nesisukančią ir be elektrinio krūvio juodąją skylę pilnai apibūdina vos vienas parametras – jos masė M.

<u>Užduotys:</u>

1) Remdamiesi Niutono fizika, išveskite formulę apskaičiuoti juodosios skylės, kurios masė M, spinduliui R, ties kuriuo pabėgimo nuo juodosios skylės greitis būtų lygus šviesos greičiui c.

2) Išveskite formulę juodosios skylės paviršiaus plotui A apskaičiuoti tardami, kad jos spindulys yra 1) užduotyje rastasis R.

3) Išveskite formulę juodosios skylės vidutiniam tankiui ρ apskaičiuoti. Apibūdinkite, kaip keisis tankis didėjant masei M.

Klasikinėje termodinamikoje netvarka nusakoma dydžiu, vadinamu entropija S, kuri glaudžiai susijusi su termodinamine temperatūra T. Entropijos matavimo vienetas išreiškus pagrindiniais SI matavimo vienetais yra

$$(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2)/(\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{K}) \qquad [1]$$

Juodosios skylės atveju manoma, kad entropija S tiesiai proporcinga jos paviršiaus plotui A:

$$S = pA \qquad [2]$$

Čia p – tam tikras proporcingumo koeficientas, kuris gali būti išreikštas taip:

$$p = c^{n1} \cdot G^{n2} \cdot k^{n3} \cdot \hbar^{n4} \qquad [3]$$

Čia c – šviesos greitis, G – gravitacinė konstanta, $\hbar$ – redukuotoji (padalinta iš 2π) Planko konstanta ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$), k – Bolcmano konstanta, o $n1 - n4$ – laipsnio rodikliai (sveiki skaičiai).

4) Išveskite juodosios skylės entropijos S priklausomybės nuo jos masės M sąryšio formulę, parinkdami tokius laipsnio rodiklius $n1, n2, n3, n4$, kad [3] įstačius į [2] gautumėte entropiją išreikštą [1] nurodytais vienetais.

Sistemos termodinaminė temperatūra T apibrėžiama kaip sistemos pilnos energijos pokyčio dE ir tos sistemos entropijos pokyčio dS santykis. Jei masė pakito labai mažu dydžiu dM, tai temperatūrą galima taip apskaičiuoti:

$$T = \frac{dE}{dS} = \frac{E(M + dM) - E(M)}{S(M + dM) - S(M)}$$

5) Raskite M masės juodosios skylės temperatūrą, kai masė lygi: elektrono masei, Saulės masei, 10^8 Saulės masių. Tarkite, kad pilna juodosios skylės energija $E = Mc^2$.

6) Raskite, koks bus dėl Hokingo spinduliuotės juodosios skylės „šviesis“ L, išreikštas per M.

7) Raskite laiką, per kurį M masės juodoji skylė „išgaruos“ dėl Hokingo spinduliuotės. Tarkime, kad „garavimo“ metu juodoji skylė iš išorės energijos negauna. Apskaičiuokite, kiek ilgai truks elektrono masės, Saulės masės ir 10^8 Saulės masių juodosios skylės „garavimas“.

Sprendimas

1) Juodosios skylės, kurios masė M, spindulio R skaičiavimas.

Pagal Niutono fiziką dalelės pabėgimas galimas tada, kai jos kinetinė energija lygi potencinei energijai (arba už ją didesnė):

$$\frac{mv^2}{2} = G\frac{mM}{R}$$

Kai $v = c$, (Švarcšildo) spindulys

$$R = \frac{2G}{c^2}M$$

2) Juodosios skylės paviršiaus plotas A, apskaičiuotas naudojant spindulį, rastą 1) užduotyje.

$$A = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{2G}{c^2}M\right)^2 = \frac{16\pi G^2}{c^4}M^2$$

3) Juodosios skylės vidutinio tankio ρ skaičiavimas. Apibūdinimas, kaip keisis tankis didėjant masei M.

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3}\frac{1}{M^2}$$

Apibūdinimas: **Juodosios skylės tankis mažėja proporcingai masės kvadratui (tankis atvirkščiai proporcingas masės kvadratui).**

4) Juodosios skylės entropijos S priklausomybės nuo jos masės M sąryšio formulės išvedimas.

$S = pA$ Užrašome su dimensijomis :

$$S\left[\frac{kg \cdot m^2}{s^2 \cdot K}\right] = p\left[\frac{kg}{s^2 \cdot K}\right] \cdot A[m^2]$$

Bet $p = c^{n1} \cdot G^{n2} \cdot k^{n3} \cdot \hbar^{n4}$. Užrašę tik dimensijas, gauname:

$$\left[\frac{m}{s}\right]^{n1} \cdot \left[\frac{m^3}{kg \cdot s^2}\right]^{n2} \cdot \left[\frac{J}{K}\right]^{n3} \cdot [J \cdot s]^{n4} = \left[\frac{kg}{s^2 \cdot K}\right]$$

Išreiškiame $[J]$ per pagrindinius SI vienetus $[J] = \left[\frac{kg \cdot m^2}{s^2}\right]$ ir perrašome dimensijų lygybę:

$$\left[\frac{m}{s}\right]^{n1} \cdot \left[\frac{m^3}{kg \cdot s^2}\right]^{n2} \cdot \left[\frac{kg \cdot m^2}{s^2}\frac{1}{K}\right]^{n3} \cdot \left[\frac{kg \cdot m^2}{s^2} \cdot s\right]^{n4} = \left[\frac{kg}{s^2 \cdot K}\right]$$

Kadangi ir dešinėje, ir kairėje pusėje turime $\left[\frac{1}{K}\right]$, tai akivaizdu, kad $n3 = 1$.

Matome, kad $n2 = n4$ (tokiu būdu suprastinsime papildomus kg, nes dešinėje pusėje kg yra tik pirmame laipsnyje), perrašome:

$$\left[\frac{m}{s}\right]^{n1} \cdot \left[\frac{m^3}{kg \cdot s^2}\frac{kg \cdot m^2}{s}\right]^{n2} \cdot \left[\frac{kg \cdot m^2}{s^2}\frac{1}{K}\right]^1 = \left[\frac{kg}{s^2 \cdot K}\right]$$

Suprastiname ir sutraukiame dimensijų lygybę:

$$\left[\frac{m}{s}\right]^{n1} \cdot \left[\frac{m^5}{s^3}\right]^{n2} \cdot m^2 \cdot \left[\frac{kg}{s^2 \cdot K}\right]^1 = \left[\frac{kg}{s^2 \cdot K}\right]$$

Parinkę $n1 = 3$ ir $n2 = -1$ gauname:

$$\left[\frac{m}{s}\right]^3 \cdot \left[\frac{m^5}{s^3}\right]^{-1} \cdot m^2 \cdot \left[\frac{kg}{s^2 \cdot K}\right]^1 = \left[\frac{kg}{s^2 \cdot K}\right]$$

$$\left[\frac{m^5 \cdot s^3}{m^5 \cdot s^3}\right] \cdot \left[\frac{kg}{s^2 \cdot K}\right]^1 = \left[\frac{kg}{s^2 \cdot K}\right]$$

$$\left[\frac{kg}{s^2 \cdot K}\right] = \left[\frac{kg}{s^2 \cdot K}\right]$$

Radome, kad [2] bus teisinga, kai $n1 = 3$, $n2 = -1, n3 = 1, n4 = -1$, tada:

$$p = c^{n1} \cdot G^{n2} \cdot k^{n3} \cdot \hbar^{n4} = c^3 \cdot G^{-1} \cdot k^1 \cdot \hbar^{-1} = \frac{c^3 k}{G\hbar}$$

$$S = pA = \frac{c^3 k}{G\hbar} \cdot 16\pi \frac{G^2}{c^4} M^2$$

Galutinė formulė:

$$\boldsymbol{S = \frac{16\pi G k}{c\hbar} M^2}$$

<u>5) Juodosios skylės temperatūros skaičiavimas, kai jos masė M lygi: elektrono masei, Saulės masei, 10^8 Saulės masių</u>.

$$T = \frac{E(M + dM) - E(M)}{S(M + dM) - S(M)} = \frac{(M + dM)c^2 - Mc^2}{\frac{16\pi Gk}{c\hbar}(M + dM)^2 - \frac{16\pi Gk}{c\hbar}M^2} =$$

$$= \frac{Mc^2 + dM \cdot c^2 - Mc^2}{\frac{16\pi Gk}{c\hbar}(M^2 + 2M \cdot dM + dM^2 - M^2)} = \frac{c\hbar}{16\pi Gk}\frac{dM \cdot c^2}{(2M + dM) \times dM} \approx \frac{c^3\hbar}{32\pi Gk}\frac{1}{M}$$

<u>Pastaba:</u> iš nario $(2M + dM)$ atmetėme dM, kadangi tai labai mažas dydis.

Galutinė formulė:

$$\boldsymbol{T = \frac{c^3\hbar}{32\pi Gk}\frac{1}{M}}$$

Įstatę konstantas gauname:

$$T = \frac{299792458^3 \times 1.05457 \times 10^{-34}}{32\pi \times 6.67428 \times 10^{-11} \times 1.38065 \times 10^{-23}} \times \frac{1}{\mathrm{M}} \approx \frac{3 \times 10^{22}}{M} \; [K]$$

Elektrono masės juodosios skylės temperatūra $T = \frac{3 \times 10^{22}}{9 \times 10^{-31}} \approx 3 \times 10^{52}\ K$

Saulės masės juodosios skylės temperatūra $T = \frac{3 \times 10^{22}}{2 \times 10^{30}} \approx 1{,}5 \times 10^{-8}\ K$

10^8 Saulės masių juodosios skylės temperatūra $T = \frac{3 \times 10^{22}}{2 \times 10^{38}} \approx 1{,}5 \times 10^{-16}\ K$

<u>6) Hokingo spinduliuotės sukurtas juodosios skylės „šviesis“ L, išreikštas per M.</u>

$$\boldsymbol{L = A \times \sigma T^4 = 16\pi \frac{G^2}{c^4} M^2 \times \left(\frac{c^3\hbar}{32\pi Gk}\frac{1}{M}\right)^4 = \frac{1}{2^{16}\pi^3}\frac{c^8\sigma\hbar^4}{G^2k^4}\frac{1}{M^2}}$$

<u>7) Laikas, per kurį M masės juodoji skylė „išgaruos“ dėl Hokingo spinduliuotės.</u> Kiek ilgai truks elektrono masės, Saulės masės ir 10^8 Saulės masių juodosios skylės „garavimas“?

$$\boldsymbol{t = \frac{E}{L} = \frac{Mc^2}{\frac{1}{2^{16}\pi^3}\frac{c^8\sigma\hbar^4}{G^2k^4}\frac{1}{M^2}} = 2^{16}\pi^3\frac{G^2k^4}{c^6\sigma\hbar^4}M^3 \approx 6,46} \times 10^{-14} \times \boldsymbol{M^3}\ [\boldsymbol{s}]$$

Čia σ – Stefano – Bolcmano konstanta.

Elektrono masės juodoji skylės „išgaruos“ per $t \approx 5 \times 10^{-104}$ s

Saulės masės juodoji skylė „išgaruos“ per $t = 5 \times 10^{77}$ s $\approx 1{,}6 \times 10^{70}$ metų

10^8 Saulės masių juodoji skylė „išgaruos“ per $t \approx 1{,}6 \times 10^{94}$ metų