Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Rajono (miesto) etapo užduočių 9 - 10 klasei sprendimai
2018 m.

1 uždavinys. Įrodykite, kad

a) kiekvienas natūralusis skaičius a;
b) kiekvienas teigiamas racionalusis skaičius a

yra lygus natūraliojo skaičiaus penktojo laipsnio ir natūraliojo skaičiaus trečiojo laipsnio santykiui, t. y. kad $a = b^5 : c^3$, kur b ir c yra natūralieji skaičiai.

Sprendimas. a) dalyje galima imti $b = a^2$ ir $c = a^3$. Tada $b^5 : c^3 = a^{10} : a^9 = a$. Tačiau galima iš karto spręsti b) dalį, nes a) dalis yra atskiras b) dalies atvejis.

Teigiamas racionalusis skaičius a gali būti užrašytas $a = \frac{m}{n}$, kur m ir n – natūralieji skaičiai. Pamėginkime skaitiklį ir vardiklį padauginti iš to paties skaičiaus $m^x n^y$, kur x ir y – natūralieji skaičiai, taip, kad naujieji skaitiklis $m^{x+1}n^y$ ir vardiklis $m^x n^{y+1}$ būtų atitinkamai penktasis ir trečiasis natūraliojo skaičiaus laipsniai. Tam pakanka, kad laipsnių rodikliai $x + 1$ ir y dalytųsi iš 5, o x ir $y + 1$ – iš 3. Tinka $x = 9$, $y = 5$. Tada

$$\frac{m}{n} = \frac{m^{10}n^5}{m^9 n^6} = \frac{(m^2 n)^5}{(m^3 n^2)^3}.$$

2 uždavinys. Adomas turi keletą akmenėlių (nebūtinai vienodos masės). Žinoma, kad šiuos akmenėlius galima padalyti į tris vienodos masės krūveles. Be to, Adomo turimus akmenėlius galima padalyti ir į keturias vienodos masės krūveles. (Krūvelę gali sudaryti ir lygiai vienas akmenėlis.)

a) Kiek mažiausiai akmenėlių gali turėti Adomas?
b) Kiek mažiausiai akmenėlių gali turėti Adomas, jei visų akmenėlių masės yra skirtingos?

Sprendimas. a) Nesunku įsitikinti, kad Adomas gali turėti 6 akmenėlius – tris 3 g masės ir tris 1 g masės:

$$(3 + 1) + (3 + 1) + (3 + 1) = 3 + 3 + 3 + (1 + 1 + 1).$$

Įrodysime, kad Adomas negali turėti mažiau akmenėlių. Iš tikrųjų, tarkime, kad Adomas turi mažiau negu 6 akmenėlius. Pagal sąlygą šiuos akmenėlius galima padalyti į tris vienodos masės krūveles. Bent vienoje iš jų yra tik vienas akmenėlis (kitaip akmenėlių iš viso būtų mažiausiai $2 + 2 + 2 = 6$), o jo masė lygi trečdaliui bendros visų akmenėlių masės. Šio akmenėlio negali būti jokioje iš keturių vienodos masės krūvelių, nes kiekvienos iš jų masė tėra ketvirtadalis bendros masės. Vadinasi, nepavyks visų akmenėlių padalyti į keturias reikiamas krūveles. Gauta prieštara rodo, kad Adomas turi mažiausiai 6 akmenėlius.

b) Jei akmenėlių masės skirtingos, tai Adomas negali turėti šešių ar mažiau akmenėlių. Tarkime priešingai. Pagal sąlygą akmenėlius galima suskirstyti į 4 vienodos masės krūveles. Bent dviejose krūvelėse yra tik po vieną akmenėlį (kitaip akmenėlių iš viso būtų mažiausiai $1 + 2 + 2 + 2 = 7$), tada šių dviejų akmenėlių masės vienodos. Gauta prieštara rodo, kad Adomas turi mažiausiai 7 akmenėlius. Kita vertus, Adomas gali turėti lygiai 7 akmenėlius, kurių masės, pavyzdžiui, yra 1 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g, 8 g ir 9 g:

$$(1 + 5 + 6) + (3 + 9) + (4 + 8) = (1 + 8) + (3 + 6) + (4 + 5) + 9.$$

Ats.: a) 6; b) 7.

3 uždavinys. Duoti keturi dviženkliai skaičiai $\overline{AA}$, $\overline{BB}$, $\overline{AB}$ ir $\overline{BA}$, kur A ir B yra nenuliniai skaitmenys. Žinoma, kad kažkurių trijų iš šių dviženklių skaičių suma lygi 147. Raskite visas galimas reiškinio $A^B + 2 \cdot \overline{AB} - B^A$ teigiamas reikšmes.

Sprendimas. Jei dviženklis skaičius X, neįskaičiuotas į sumą, lygią 147, yra $\overline{AA}$, tai skaičiui 147 turi būti lygi likusių dviženklių skaičių suma

$$\overline{BB} + \overline{AB} + \overline{BA} = 10B + B + 10A + B + 10B + A = 11(A + 2B).$$

Matome, kad suma dalijasi iš 11. Kita vertus, skaičius $147 = 13 \cdot 11 + 4$ nesidalija iš 11. Todėl $X \neq \overline{AA}$. Analogiškai įrodoma, kad $X \neq \overline{BB}$.

Vadinasi, $X = \overline{AB}$ arba $X = \overline{BA}$.

Kai $X = \overline{AB}$, tai

$$\overline{AA} + \overline{BB} + \overline{BA} = 147,$$
$$21B + 12A = 147.$$

Abi lygybės puses padaliję iš 3, gauname $7B + 4A = 49$. Skaičius $4A = 49 - 7B = 7(7 - B)$ dalijasi iš 7. Todėl skaitmuo A dalijasi iš 7. Kadangi $A \neq 0$, tai $A = 7$. Iš lygybės $7B + 4A = 49$ randame, kad $B = 3$. Kita vertus, skaičiai 77, 33, 73 ir 37 tenkina uždavinio sąlygą: $77 + 33 + 37 = 147$.

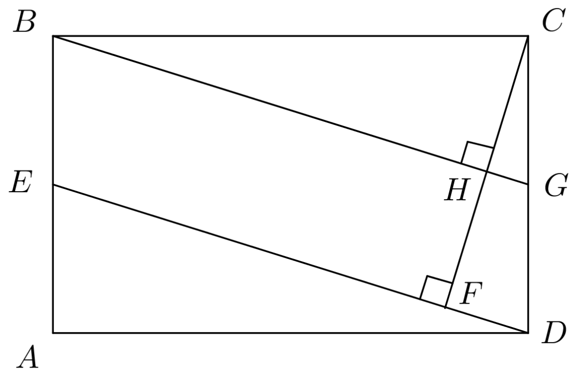
Kai $X = \overline{BA}$, analogiškai gausime $A = 3$, $B = 7$.

Jei $A = 7$ ir $B = 3$, tai reiškinio $A^B + 2 \cdot \overline{AB} - B^A$ reikšmė lygi $-1698 < 0$. Jei $A = 3$ ir $B = 7$, tai reiškinio $A^B + 2 \cdot \overline{AB} - B^A$ reikšmė lygi 1918.

Ats.: 1918.

4 uždavinys. Taškas E yra stačiakampio $ABCD$ trumpesniosios kraštinės AB vidurio taškas. Atkarpoje ED pažymėtas toks taškas F, kad $\angle EFC = 90°$. Įrodykite, kad trikampis CBF yra lygiašonis.

Sprendimas. Kraštinės CD vidurio tašką pažymėkime G, o tiesių BG ir CF susikirtimo tašką pažymėkime H (žr. pav.). Tada $CG = GD$.



Statieji trikampiai BCG ir DAE yra lygūs, nes $BC = DA$, $CG = AE$ ir $\angle BCG = \angle DAE = 90°$. Todėl

$$\angle BGC = \angle DEA = 90° - \angle EDA = \angle CDE.$$

Vadinasi, tiesės BG ir ED yra lygiagrečios (pagal atitinkamuosius kampus). Kadangi $CG = GD$ ir $HG || FD$, tai HG – trikampio DFC vidurio linija. Todėl $CH = HF$. Be to, $\angle BHC = \angle EFC = 90°$ (atitinkamieji kampai). Vadinasi, trikampio CBF aukštinė BH yra ir jo pusiaukraštinė. Todėl trikampis CBF yra lygiašonis.

5 uždavinys. Natūralieji skaičiai x ir y tenkina lygybę

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{120}.$$

a) Kiek iš viso yra tokių porų (x, y)?

b) Raskite didžiausią pirminį skaičių, iš kurio gali dalytis skaičius x.

Sprendimas. a) Tarkime, kad natūraliųjų skaičių pora (x, y) tenkina duotąją lygtį. Kadangi $\frac{1}{120} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{x}$, tai $x > 120$. Duotąją lygtį galima pervarkyti:

$$y = 120 + \frac{120^2}{x - 120} \quad \text{arba} \quad (x - 120)(y - 120) = 120^2.$$

Vadinasi, $d = x - 120 > 0$ yra skaičiaus 120^2 natūralusis daliklis. Kita vertus, jei turime natūralųjį skaičiaus 120^2 daliklį d, tai, pasirinkę $x = d + 120$ ir radę $y = 120 + \frac{120^2}{d}$, gausime pertvarkytos, o todėl ir pradinės lygties natūralųjį sprendinį (x, y). Vadinasi, sprendinių (x, y) skaičius lygus skaičiaus 120^2 natūraliųjų daliklių skaičiui. Kadangi

$120^2 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, tai skaičiaus 120^2 natūralieji dalikliai yra skaičiai $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, kur $a = 0, 1, \dots, 6$, $b = 0, 1, 2$, $c = 0, 1, 2$. Tokių skaičių yra $(6 + 1)(2 + 1)(2 + 1) = 63$. Vadinasi, yra lygiai 63 poros (x, y), tenkinančios uždavinio sąlygą.

b) Pora $(122, 7320)$ gaunama, lygybėse $x = 120 + d$ ir $y = 120 + \frac{120^2}{d}$ paėmus $d = 2$. Ji tenkina uždavinio sąlygą ir pirminis skaičius 61 dalija $x = 122 = 2 \cdot 61$.

Tarkime, kad pora (x, y) tenkina sąlygą ir pirminis skaičius $p > 61$ dalija x. a) dalyje gavome, kad $x = 120 + d$, kur d yra skaičiaus 120^2 natūralusis daliklis. Tada $d = d_1 d_2$, kur d_1 ir d_2 yra skaičiaus 120 natūralieji dalikliai, ir

$$x = 120 + d = 120 + d_1 d_2 = d_2 \left(\frac{120}{d_2} + d_1 \right).$$

Skliaustuose esantys du dėmenys taip pat yra skaičiaus 120 natūralieji dalikliai. Jų didžiausią bendrąjį daliklį pažymėkime t. Tada $\frac{120}{d_2} = t a_1$ ir $d_1 = t a_2$, kur a_1 ir a_2 yra tarpusavyje pirminiai skaičiai. Taigi,

$$x = d_2 \left(\frac{120}{d_2} + d_1 \right) = d_2 t (a_1 + a_2).$$

Skaičiai d_2 ir t yra skaičiaus 120 dalikliai ir iš $p > 61$ nesidalija. Todėl suma $a_1 + a_2$ dalijasi iš p.

Kadangi a_1 ir a_2 yra tarpusavyje pirminiai skaičiaus 120 dalikliai, tai 120 dalijasi iš $a_1 a_2$ ir todėl $a_1 a_2 \leqslant 120$. Nemažindami bendrumo, laikykime, kad $a_1 \leqslant a_2$.

Jei $a_1 \geqslant 11$, tai $a_1 a_2 \geqslant 11^2 > 120$, todėl $a_1 \leqslant 10$.

Jei $a_1 \geqslant 3$, tai $61 < p \leqslant a_1 + a_2 \leqslant a_1 + \frac{120}{a_1} \leqslant 10 + \frac{120}{3} < 61$. Todėl $a_1 \leqslant 2$.

Jei $a_1 = 1$ arba 2, tai $a_2 \geqslant p - a_1 > 61 - a_1 \geqslant 59$, todėl $a_2 = 60$ arba $a_2 = 120$. Tačiau nė viena iš sumų $60+1$, $60+2$, $120+1$, $120+2$ neturi pirminio daliklio, didesnio už 61. Gavome prieštarą.

Taigi, didžiausias galimas skaičiaus x pirminis daliklis lygus 61.

Ats.: a) 63; b) 61.