Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Rajono (miesto) etapo užduočių 11 - 12 klasei sprendimai
2018 m.

1 uždavinys. Įrodykite, kad

a) kiekvienas natūralusis skaičius a;

b) kiekvienas teigiamas racionalusis skaičius a

yra lygus natūraliojo skaičiaus penktojo laipsnio ir natūraliojo skaičiaus trečiojo laipsnio santykiui, t. y. kad $a = b^5 : c^3$, kur b ir c yra natūralieji skaičiai.

Sprendimas. a) dalyje galima imti $b = a^2$ ir $c = a^3$. Tada $b^5 : c^3 = a^{10} : a^9 = a$. Tačiau galima iš karto spręsti b) dalį, nes a) dalis yra atskiras b) dalies atvejis.

Teigiamas racionalusis skaičius a gali būti užrašytas $a = \frac{m}{n}$, kur m ir n – natūralieji skaičiai. Pamėginkime skaitiklį ir vardiklį padauginti iš to paties skaičiaus $m^x n^y$, kur x ir y – natūralieji skaičiai, taip, kad naujieji skaitiklis $m^{x+1}n^y$ ir vardiklis $m^x n^{y+1}$ būtų atitinkamai penktasis ir trečiasis natūraliojo skaičiaus laipsniai. Tam pakanka, kad laipsnių rodikliai $x + 1$ ir y dalytųsi iš 5, o x ir $y + 1$ – iš 3. Tinka $x = 9$, $y = 5$. Tada

$$\frac{m}{n} = \frac{m^{10}n^5}{m^9 n^6} = \frac{(m^2 n)^5}{(m^3 n^2)^3}.$$

2 uždavinys. Palei sieną išrikiuotos kelios pintinės su uogomis (daugiau nei viena pintinė, ir visos netuščios). Kairiausioje pintinėje yra a uogų, o kiekvienoje kitoje pintinėje – viena uoga daugiau nei gretimoje pintinėje iš kairės. Iš viso pintinėse yra 8668 uogos. Raskite visų galimų skaičiaus a natūraliųjų reikšmių sumą.

(Žinoma, kad $8668 = 44 \cdot 197$, kur skaičius 197 pirminis.)

Sprendimas. Reikia nustatyti, kurioms natūraliosioms reikšmėms a ir k galioja

$$8668 = a + (a + 1) + \ldots + (a + k) = \frac{(2a + k)(k + 1)}{2},$$

arba $(2a + k)(k + 1) = 17336 = 2^3 \cdot 11 \cdot 197$.

Jei $k+1$ dalijasi iš pirminio skaičiaus 197, tai $2a+k > k+1 \geqslant 197$ ir $(2a+k)(k+1) >$ $> 197^2 > 2^3 \cdot 11 \cdot 197$. Todėl $k + 1$ iš 197 nesidalija ir yra skaičiaus $2^3 \cdot 11$ daliklis, t. y. $k + 1 = 2, 4, 8, 11, 22, 44$ arba 88. Skaičius $2a + k = (k + 1) + (2a - 1)$ turi būti kito lyginumo nei $k+1$, todėl tinka tik $k+1 = 8, 11$ arba 88. Tada atitinkamai $a = 1080, 783$ arba 55. Šių reikšmių tikrinti nebūtina, pastebėjus, kad jos kartu su atitinkamomis k reikšmėmis tenkina lygybę $(2a + k)(k + 1) = 17336$, iš kurios jos ir randamos.

Šių reikšmių suma lygi $1080 + 783 + 55 = 1918$.

Ats.: 1918.

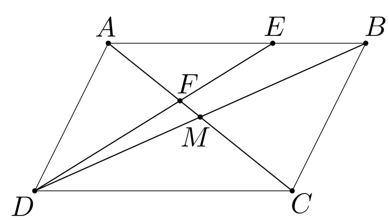
3 uždavinys. Alfredas, Albertas ir Alvydas nusipirko šachmatų lentą ir lošia šachmatais, pasikeisdami pagal tokią taisyklę: dviem iš jų sulošus partiją, kitą iš eilės partiją lošia nugalėtojas ir likęs trečiasis žaidėjas. Vieną dieną Alfredas sulošė 15 partijų, Albertas – 14 partijų, o Alvydas – 9 partijas (lygiųjų nepasitaikė). Kas tą dieną lošė tryliktąją partiją? Kelias partijas Alvydas tą dieną laimėjo?

Sprendimas. Kiekvieną partiją lošė du žaidėjai, todėl iš viso sulošta $\frac{15+14+9}{2} = 19$ partijų. Žaidėjas, nelošęs kurios nors partijos, tolimesnėje partijoje dalyvauja, todėl bet kuriose dviejose viena po kitos loštose partijose dalyvavo visi trys žaidėjai. Pirmąsias 18 partijų galima suskirstyti į 9 poras: 1-oji ir 2-oji, 3-ioji ir 4-oji, ..., 17-oji ir 18-oji. Alvydas sulošė tik 9 partijas, todėl kiekvienoje partijų poroje dalyvavo po lygiai vieną kartą, o paskutinės partijos jis nelošė. Analogiškai, jis nelošė ir 1-osios partijos. Bet tada jis tikrai lošė 2-ąją, nelošė 3-iosios, lošė 4-ąją, ir t. t. Jis lošė tik partijas su lyginiais eilės numeriais ir kaip laimėtojas nelošė jokios partijos su nelyginiu eilės numeriu. Vadinasi, Alvydas nelaimėjo nė vienos partijos, o 13-ąją partiją lošė Alfredas ir Albertas.

Ats.: 13-ąją partiją lošė Alfredas ir Albertas; Alvydas nelaimėjo nė vienos partijos.

4 uždavinys. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėje AB pažymėtas toks taškas E, kad $BC + BE = CD$. Lygiagretainio įstrižainės kertasi taške M. Atkarpos DE ir AM kertasi taške F. Įrodykite, kad $2FM \cdot EA = FA \cdot EB$.

Sprendimas.



Pažymėkime $\alpha = \angle ADE$.

Kadangi $AE = AB - BE = AB - (CD - BC) = AB - (AB - AD) = AD$, tai trikampis ADE lygiašonis ir jo kampai lygūs $\angle ADE = \angle AED = \alpha$ bei $\angle DAE = 180° - 2\alpha$. Tačiau tada $\angle ADC = 180° - \angle DAB = 2\alpha$ (kraštinės AB ir CD lygiagrečios) ir $\angle FDC = \angle ADC - \angle ADE = 2\alpha - \alpha = \alpha = \angle FDA$. Todėl atkarpa DF yra trikampio ADC pusiaukampinė. Pagal pusiaukampinės savybę turime $FC : FA = DC : DA$. Lygiagretainio įstrižainės dalija viena kitą pusiau, todėl $FM = FC - MC = FC - \frac{1}{2}(FA + FC) = \frac{1}{2}(FC - FA)$ ir $2FM : FA = (FC - FA) : FA = FC : FA - 1 = DC : DA - 1$. Kita vertus, $EB : EA = (CD - BC) : DA = (DC - DA) : DA = DC : DA - 1$. Vadinasi, $2FM : FA = EB : EA$ ir $2FM \cdot EA = FA \cdot EB$.

5 uždavinys. Duoti natūralusis skaičius n ir pirminis skaičius $p < 10\,000$. Lygtis

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n^p}$$

turi lygiai 1009^{2018} natūraliųjų sprendinių (x, y). Raskite visas galimas p reikšmes. (Skaičius 1009 yra pirminis.)

Sprendimas. Pastebėkime, kad jei lygtyje $0 < x \leqslant n^p$, tai $\frac{1}{y} \leqslant 0$. Vadinasi, jei (x, y) yra duotosios lygties natūralusis sprendinys, tai $x > n^p$.

Duotąją lygtį galima pertvarkyti:

$$(x - n^p)(y - n^p) = n^{2p} \quad \text{arba} \quad y = n^p + \frac{n^{2p}}{x - n^p}.$$

Vadinasi, $d = x - n^p > 0$ yra skaičiaus n^{2p} daliklis. Kita vertus, jei turime natūralųjį skaičiaus n^{2p} daliklį d, tai, pasirinkę $x = d + n^p$ ir radę $y = n^p + \frac{n^{2p}}{d}$, gausime pertvarkytos, o todėl ir pradinės lygties natūralųjį sprendinį (x, y). Taigi, duotoji lygtis turi tiek sprendinių, kiek skaičius n^{2p} turi natūraliųjų daliklių d. Turime rasti p reikšmes, kurioms skaičius n^{2p} gali turėti lygiai 1009^{2018} daliklių. Jei skaičiaus n skaidinys pirminiais daugikliais yra $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m}$, tai n^{2p} turi $(2p\alpha_1 + 1) \ldots (2p\alpha_m + 1)$ natūraliųjų daliklių.

Imkime $m = 1009$ ir $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \alpha$. Tada $2p\alpha + 1 = 1009^2$, ir p gali būti skaičiaus $(1009^2 - 1) : 2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 101$ bet kuris pirminis daliklis: $p = 2, 3, 5, 7$ arba 101. Skaičius n su $m = 1009$ ir atitinkamu α visada egzistuos: pvz., $p_1, p_2, \ldots$ gali būti pirmieji 1009 pirminiai skaičiai.

Jei $(2p\alpha_1 + 1) \ldots (2p\alpha_m + 1) = 1009^{2018}$, tai reikšmės $2p\alpha_i + 1$ yra skaičiaus 1009 (natūralieji) laipsniai (skaičius 1009 pirminis). Taigi, egzistuoja toks skaičiaus 1009 laipsnis, kuris dalijasi iš $2p$ su liekana 1. Mažiausią tokį natūralųjį laipsnį pažymėkime 1009^a. Sekoje $1009, 1009^2, \ldots$ liekanos moduliu $2p$ kartojasi cikliškai, todėl su liekana 1 dalijasi tik $1009^a, 1009^{2a}, \ldots$ Tada visi skaičiai $2p\alpha_i + 1$ yra skaičiaus 1009^a laipsniai ir $1009^{2018} = 1009^{ab}$, kur skaičius b natūralusis. Skaičius a yra skaičiaus $2018 = 2 \cdot 1009$ daliklis: $a = 1, 2, 1009$ arba 2018.

Pirmaisiais dviem atvejais skaičius p dalija $(1009^2 - 1) : 2$, o šią situaciją jau išnagrinėjome. Pagal Mažąją Ferma teoremą laipsnis 1009^{p-1} priklauso sekai $1009^a, 1009^{2a}, \ldots$, todėl $p - 1$ dalijasi iš a. Vadinasi, jei $a = 1009$ arba 2018, tai $p - 1$ dalijasi iš 1009. Tada $p = 1010, 2019, 3028, 4037, 5046, 6055, 7064, 8073, 9082$ (didesnės reikšmės per didelės). Tačiau nė vienas iš šių skaičių nėra pirminis (dalijasi iš 2, 3, 5 arba 11). Vadinasi, daugiau tinkamų p reikšmių nėra.

Ats.: $p = 2, 3, 5, 7$ arba 101.