Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Savivaldybių etapo užduočių 11 - 12 klasei sprendimai

2021 m.

1 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x + 3y, \\ x^4 + y^4 = \dfrac{(x+3y)^2}{2} \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius (x, y).

Sprendimas. Į antrąją sistemos lygtį, padaugintą iš 2, įrašykime $x + 3y = x^2 + y^2$:

$$2x^4 + 2y^4 = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4.$$

Sukėlus narius į vieną pusę, galima pastebėti pilnąjį kvadratą:

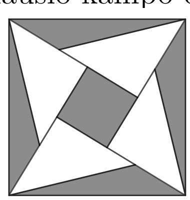
$$0 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 - y^2)^2, \qquad x^2 = y^2.$$

Todėl $x = y$ arba $x = -y$. Jei $x = -y$, tai $2y^2 = x^2 + y^2 = x + 3y = 2y$, $2y(y-1) = 0$. Tada $y = 0$ arba 1, ir atitinkamai $x = 0$ arba -1. Jei $x = y$, tai $2y^2 = x^2 + y^2 = x + 3y = 4y$, $2y(y-2) = 0$. Tada $y = x = 0$ arba $y = x = 2$.

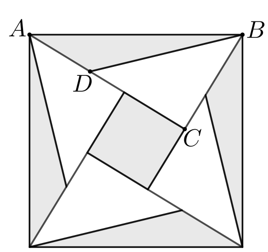
Nesunku įsitikinti, kad gautosios poros $(0,0)$, $(-1,1)$, $(2,2)$ yra sistemos sprendiniai.

Ats.: $(0,0)$, $(-1,1)$, $(2,2)$.

2 uždavinys. Paveikslėlyje pavaizduoti keturi balti trikampiai yra lygūs, statieji ir lygiašoniai. Šie balti trikampiai, keturi lygūs pilki trikampiai ir pilkas kvadratas sudaro didįjį kvadratą. Penkių pilkųjų figūrų plotų suma lygi keturių baltųjų trikampių plotų sumai. Raskite pilko trikampio mažiausio kampo didumą.



Sprendimas. Nagrinėkime stačiuosius trikampius ABC ir BCD (žr. pav.). Trikampio ABC kraštines pažymėkime $BC = a$, $AB = c$.



Stačiojo lygiašonio trikampio BCD plotas $\frac{a^2}{2}$ ir dar trijų tokių pačių baltų trikampių plotai sudaro pusę didžiojo kvadrato ploto c^2:

$$4 \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{c^2}{2}, \qquad c = 2a.$$

Kadangi stačiojo trikampio ABC statinis $BC = a$ lygus pusei įžambinės $AB = c$, tai statinis yra prieš $\angle BAC = 30^\circ$ kampą. Stačiojo lygiašonio trikampio BCD kampai lygūs $\angle CBD = \angle BDC = 45^\circ$. Vadinasi,

$$\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = (90^\circ - \angle BAC) - 45^\circ = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ.$$

Kiti du trikampio ABD kampai didesni nei 15°:

$$\angle ADB = 180^\circ - \angle BDC > 90^\circ, \qquad \angle BAD = \angle BAC = 30^\circ.$$

Ats.: 15°.

3 uždavinys. Ratu surašyti skaičiai. Šiame skaičių rate yra m skaičių, lygių 2, o likę rato skaičiai lygūs 1. Rate kiekvienas skaičius a yra tarp dviejų jam gretimų skaičių, iš kurių bent vienas nelygus a. Kiekvienas užrašytas skaičius a sudaugintas su abiem jam gretimais skaičiais b ir c. Visų tokių sandaugų abc suma lygi 2021202. Nustatykite visas galimas skaičiaus m reikšmes.

Sprendimas. Kiekviena sandauga abc lygi $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$ arba $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$. Tarkime, kad iš viso turime x sandaugų $abc = 2$ ir y sandaugų $abc = 4$. Tada

$$2x + 4y = 2021202, \qquad x + 2y = 2021202 : 2 = 1010601.$$

Kita vertus, sandaugoje $abc = 2$ turime vieną dauginamąjį, lygų 2, o sandaugoje $abc = 4$ – du tokius dauginamuosius. Taip iš viso gauname $x + 2y$ dauginamųjų, lygių 2. Skaičiuojant sandaugas abc, kiekvienas užrašytas skaičius 2 yra tris kartus panaudojamas kaip dauginamasis. Vadinasi,

$$x + 2y = 3m, \qquad m = (x + 2y) : 3 = 1010601 : 3 = 336867.$$

Uždavinį galima spręsti iš esmės analogiškai, bet apsieinant be žymėjimų. Kadangi $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$ ir $1 \cdot 2 \cdot 2 = 2 + 2$, tai sandaugų suma 2021202 yra visų atitinkamų dauginamųjų, lygių 2, suma, o skaičius $2021202 : 2$ yra tokių dauginamųjų skaičius. Kiekvienas dvejetas skaičių rate yra tris kartus panaudojamas kaip dauginamasis, todėl rate yra $(2021202 : 2) : 3 = 336867$ dvejetai.

Ats.: 336867.

4 uždavinys. Natūralųjį skaičių N vadinsime *įnulintu*, jei jis tenkina tokias dvi sąlygas:

1) visi skaičiaus N skaitmenys skirtingi, ir jei jie būtų išrikiuoti didėjimo tvarka, tai pirmasis iš jų būtų nulis, o bet kurių dviejų gretimų skaitmenų skirtumas būtų lygus 1;

2) skaičiuje N kiekvienas nenulinis skaitmuo a yra gretimas bent vienam tokiam skaitmeniui b, kad $b < a$.

Kiek yra įnulintų natūraliųjų skaičių, didesnių už 1000?

Sprendimas. Tarkime, kad skaičius N yra įnulintas. Iš eilės nagrinėdami visus jo skaitmenis nuo pirmojo skaitmens iki skaitmens 0, gausime, kad jie skaičiuje N surašyti mažėjimo tvarka. Kitaip pirmasis skaitmuo, po kurio eina už jį didesnis, netenkintų sąlygos 2). Analogiškai gauname, kad skaitmenys dešinėje nuo nulio (jei tokių esama), surašyti mažėjimo tvarka, skaitant juos iš dešinės į kairę.

Taigi kiekvienas įnulintas skaičius gaunamas, paėmus visus skaitmenis nuo 0 iki tam tikro skaitmens a, suskirsčius skaitmenis nuo 1 iki a į dvi aibes (viena iš jų gali būti tuščia) ir tada surašius skaitmenis iš pirmos aibės didėjimo tvarka dešinėje nuo nulio, o skaitmenis iš antros aibės – mažėjimo tvarka kairėje nuo nulio. Kiekvienu tokiu veiksmu sudaromas įnulintas skaičius, išskyrus vieną išimtį: kai pirmoji aibė tuščia, gautasis skaičius prasidės nuliu, o to neturėtų būti.

Pavyzdžiui, kad gautume įnulintą keturženklį skaičių, turime kiekvieną iš trijų skaitmenų 1, 2, 3 priskirti vienai iš dviejų aibių. Todėl turime $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ galimybių. Atmetę vieną netinkamą užrašą 0123, gauname, kad yra iš viso $2^3 - 1 = 7$ įnulinti keturženkliai natūralieji skaičiai.

Analogiškai, yra $2^4 - 1$ įnulintų penkiaženklių skaičių, $2^5 - 1$ įnulintų šešiaženklių skaičių, ir t. t. Didžiausi įnulinti skaičiai – dešimtženkliai (juk skaitmenų yra tik 10). Jų yra $2^9 - 1$.

Liko visus gautus įnulintų skaičių kiekius sudėti:

$$(2^3-1)+(2^4-1)+\ldots+(2^9-1) = (2^3+2^4+\ldots+2^9)-7 = 2^3\cdot(1+2+2^2+\ldots+2^6)-7 =$$

$$= 2^3 \cdot (2^7 - 1) - 7 = 2^{10} - 8 - 7 = 1024 - 15 = 1009.$$

Ats.: 1009.

5 uždavinys. Nustatykite, kiek yra natūraliųjų skaičių $n \in (0; 250\,000)$, kuriems skaičius

$$R_n = \sqrt{\left[\sqrt{n}\right] + 2\left[\sqrt{n+1}\right] + 3\left[\sqrt{n+2}\right]}$$

yra dviejų skirtingų pirminių skaičių sandauga.

Pastaba. Čia $[x]$ žymi skaičiaus x sveikąją dalį, t. y. didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnį už x.

Sprendimas. Tarkime, kad natūralusis skaičius n tenkina uždavinio sąlygą, t. y. egzistuoja tokie pirminiai skaičiai p, q, kad $p < q$ ir

$$R_n^2 = \left[\sqrt{n}\right] + 2\left[\sqrt{n+1}\right] + 3\left[\sqrt{n+2}\right] = p^2 \cdot q^2.$$

Pažymėkime $k = [\sqrt{n}]$.

Kadangi

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{1+2}+1} < 1,$$

tai $\left[\sqrt{n+2}\right] = k$ arba $k+1$. Todėl pakanka nagrinėti tris atvejus: 1) $\left[\sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{n+2}\right] = k$; 2) $\left[\sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{n+2}\right] = k+1$; 3) $\left[\sqrt{n+1}\right] = k$, $\left[\sqrt{n+2}\right] = k+1$. Atitinkamai gauname $p^2 \cdot q^2 = 6k$, $6k+5$ ir $6k+3$.

1) Skaičius $p^2 \cdot q^2 = 6k$ dalijasi iš 2 ir 3, todėl $p = 2$, $q = 3$, $k = 6$. Iš tiesų kiekvienas n, kuriam $[\sqrt{n}] = \left[\sqrt{n+2}\right] = 6$, tenkina uždavinio sąlygą: $R_n = \sqrt{6+12+18} = 2 \cdot 3$. Taip bus, kai skaičiai $\sqrt{n}$ ir $\sqrt{n+2}$ bus tarp 6 ir 7:

$$6 \leqslant \sqrt{n} < \sqrt{n+2} < 7, \qquad 36 \leqslant n < 47.$$

Taigi gauname 11 tinkamų n reikšmių: 36, 37, …, 46.

2) Skaičius $(pq-1)(pq+1) = p^2 \cdot q^2 - 1 = 6k+4$ nesidalija iš 3, todėl tarp trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių $pq-1$, pq, $pq+1$ iš 3 turi dalytis vidurinysis. Tačiau $(pq)^2 = 6k+5$ taip pat nesidalija iš 3. Vadinasi, šiuo atveju tinkamų n reikšmių nėra. Tai galima įrodyti, ir pasiremiant šiuo žinomu faktu: tikslusis kvadratas visada dalijasi iš 3 su liekana 0 arba 1. Prieštarą gauname pastebėję, kad skaičius $6k+5 = 3(2k+1)+2$ dalijasi iš 3 su liekana 2.

3) Skaičius $p^2 \cdot q^2 = 6k+3$ dalijasi iš 3, bet ne iš 2, todėl $p = 3$ ir $2k+1 = 3q^2$. Jei $q \geqslant 19$, tai $2k+1 \geqslant 1\,083$, $\sqrt{n} \geqslant k > 500$, $n > 250\,000$. Todėl $q = 5$, 7, 11, 13 arba 17. Tinkamos n reikšmės kiekvienam atitinkamam $k = \frac{3q^2-1}{2}$ gaunamos iš sąlygų

$$k \leqslant \sqrt{n} < \sqrt{n+1} < k+1 \leqslant \sqrt{n+2},$$

$$k^2 \leqslant n \qquad \text{ir} \qquad n+1 < (k+1)^2 \leqslant n+2,$$

$$k^2 \leqslant n \qquad \text{ir} \qquad (k+1)^2 = n+2.$$

Taigi tinka visi $n = k^2 + 2k - 1$, kur $k = \frac{3q^2-1}{2}$, $q = 5$, 7, 11, 13, 17. Taip gauname 5 tinkamas n reišmes.

Iš viso gavome $11 + 5 = 16$ skaičiaus n reikšmių.

Ats.: 16.