

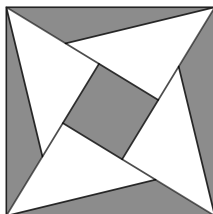
Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Savivaldybių etapo užduotys 11–12 klasei
2021 m.

1 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x + 3y, \\ x^4 + y^4 = \frac{(x + 3y)^2}{2} \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius (x, y) .

2 uždavinys. Paveikslėlyje pavaizduoti keturi balti trikampiai yra lygūs, statieji ir lygiašoniai. Šie balti trikampiai, keturi lygūs pilki trikampiai ir pilkas kvadratas sudaro didį kvadratą. Penkių pilkųjų figūrų plotų suma lygi keturių baltųjų trikampių plotų sumai. Raskite pilko trikampio mažiausio kampo didumą.



3 uždavinys. Ratu surašyti skaičiai. Šiame skaičių rate yra m skaičių, lygių 2, o likę rato skaičiai lygūs 1. Rate kiekvienas skaičius a yra tarp dviejų jam gretimų skaičių, iš kurių bent vienas nelygus a . Kiekvienas užrašytas skaičius a sudaugintas su abiem jam gretimais skaičiais b ir c . Visų tokių sandaugų abc suma lygi 2021202. Nustatykite visas galimas skaičiaus m reikšmes.

4 uždavinys. Natūralųjį skaičių N vadinsime *įnulintu*, jei jis tenkina tokias dvi sąlygas:

- 1) visi skaičiaus N skaitmenys skirtingi, ir jei jie būtų išrikiuoti didėjimo tvarka, tai pirmasis iš jų būtų nulis, o bet kurių dviejų gretimų skaitmenų skirtumas būtų lygus 1;
- 2) skaičiuje N kiekvienas nenulinis skaitmuo a yra gretimas bent vienam tokiam skaitmeniui b , kad $b < a$.

Kiek yra įnulintų natūraliųjų skaičių, didesnių už 1000?

5 uždavinys. Nustatykite, kiek yra natūraliųjų skaičių $n \in (0; 250\,000)$, kuriems skaičius

$$R_n = \sqrt{[\sqrt{n}] + 2[\sqrt{n+1}] + 3[\sqrt{n+2}]}$$

yra dviejų skirtingų pirminių skaičių sandauga.

Pastaba. Čia $[x]$ žymi skaičiaus x sveikąją dalį, t. y. didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnę už x .

Kiekvienas uždavinys vertinamas 5 taškais.