Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Savivaldybių etapo užduočių 9 - 10 klasei sprendimai
2021 m.

1 uždavinys. Kiekvienas Teisybės kaimo gyventojas yra arba teisuolis (visada sako tiesą), arba melagis (visada meluoja). Jokie du kaimo gyventojai nėra to paties ūgio. Kiekvienas Teisybės gyventojas pasakė du teiginius:

„Joks Teisybės gyventojas nėra žemesnis už mane.“

„Teisybėje yra daugiau nei 100 gyventojų, aukštesnių už mane.“

Kiek iš viso gyventojų yra Teisybėje? Keli iš jų yra melagiai?

Sprendimas. Mažiausio ūgio gyventojas pirmuoju teiginiu sako tiesą, todėl yra teisuolis. Vadinasi, ir antrasis jo teiginys yra teisingas: kaime yra mažiausiai 102 gyventojai. Antrojo žemiausio pagal ūgį gyventojo pirmasis teiginys klaidingas, todėl šis gyventojas yra melagis. Vadinasi, klaidingas ir antrasis jo teiginys: kaime yra ne daugiau nei 100 gyventojų, aukštesnių už antrąjį žemiausią kaimo gyventoją. Taigi kaime yra ne daugiau negu $100 + 2 = 102$ gyventojai. Vadinasi, kaime yra lygiai 102 gyventojai. Kadangi visų gyventojų, kurių ūgis nėra mažiausias, pirmasis teiginys yra klaidingas, tai jie visi yra melagiai: kaime yra vienas teisuolis ir 101 melagis.

Ats.: 102 gyventojai, 101 melagis.

2 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x + 3y, \\ x^4 + y^4 = \dfrac{(x+3y)^2}{2} \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius (x, y).

Sprendimas. Į antrąją sistemos lygtį, padaugintą iš 2, įrašykime $x + 3y = x^2 + y^2$:

$$2x^4 + 2y^4 = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4.$$

Sukėlus narius į vieną pusę, galima pastebėti pilnąjį kvadratą:

$$0 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 - y^2)^2, \qquad x^2 = y^2.$$

Todėl $x = y$ arba $x = -y$. Jei $x = -y$, tai $2y^2 = x^2 + y^2 = x + 3y = 2y$, $2y(y-1) = 0$. Tada $y = 0$ arba 1, ir atitinkamai $x = 0$ arba -1. Jei $x = y$, tai $2y^2 = x^2 + y^2 = x + 3y = 4y$, $2y(y-2) = 0$. Tada $y = x = 0$ arba $y = x = 2$.

Nesunku įsitikinti, kad gautosios poros $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(2, 2)$ yra sistemos sprendiniai.

Ats.: $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(2, 2)$.

3 uždavinys. Ratu surašyti skaičiai. Šiame skaičių rate yra m skaičių, lygių 2, o likę rato skaičiai lygūs 1. Rate kiekvienas skaičius a yra tarp dviejų jam gretimų skaičių, iš kurių bent vienas nelygus a. Kiekvienas užrašytas skaičius a sudaugintas su abiem jam gretimais skaičiais b ir c. Visų tokių sandaugų abc suma lygi 2021202. Nustatykite visas galimas skaičiaus m reikšmes.

Sprendimas. Kiekviena sandauga abc lygi $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$ arba $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$. Tarkime, kad iš viso turime x sandaugų $abc = 2$ ir y sandaugų $abc = 4$. Tada

$$2x + 4y = 2021202, \qquad x + 2y = 2021202 : 2 = 1010601.$$

Kita vertus, sandaugoje $abc = 2$ turime vieną dauginamąjį, lygų 2, o sandaugoje $abc = 4$ – du tokius dauginamuosius. Taip iš viso gauname $x + 2y$ dauginamųjų, lygių 2. Skaičiuojant sandaugas abc, kiekvienas užrašytas skaičius 2 yra tris kartus panaudojamas kaip dauginamasis. Vadinasi,

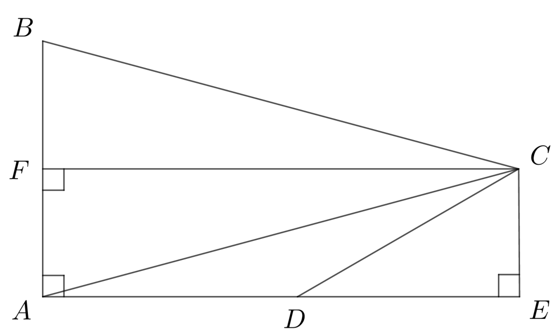
$$x + 2y = 3m, \qquad m = (x + 2y) : 3 = 1010601 : 3 = 336867.$$

Uždavinį galima spręsti iš esmės analogiškai, bet apsieinant be žymėjimų. Kadangi $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$ ir $1 \cdot 2 \cdot 2 = 2 + 2$, tai sandaugų suma 2021202 yra visų atitinkamų dauginamųjų, lygių 2, suma, o skaičius $2021202 : 2$ yra tokių dauginamųjų skaičius. Kiekvienas dvejetas skaičių rate yra tris kartus panaudojamas kaip dauginamasis, todėl rate yra $(2021202 : 2) : 3 = 336867$ dvejetai.

Ats.: 336867.

4 uždavinys. Du gretimi keturkampio kampai lygūs 90° ir 150°. Šiuos du kampus sudarančios trys keturkampio kraštinės yra lygios. Raskite kitus du keturkampio kampus.

Pirmas sprendimas. Keturkampio viršūnes pažymėkime A, B, C ir D, kad gautume $\angle BAD = 90°$, $\angle ADC = 150°$, $BA = AD = DC$. Iš viršūnės C į kraštinės AD tęsinį nuleiskime statmenį CE, o į kraštinę AB – statmenį CF (žr. pav.).



Kadangi $\angle ADC = 150°$, tai $\angle CDE = 180° - \angle ADC = 30°$. Stačiojo trikampio statinis, esantis prieš $30°$ kampą, lygus pusei įžambinės. Todėl $CE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$. Keturkampis $AFCE$ yra stačiakampis, todėl $AF = CE = \frac{1}{2}AB = BF$. Kadangi stačiųjų trikampių AFC ir BFC atitinkami statiniai yra lygūs, tai $AC = BC$, o trikampis ABC yra lygiašonis. Todėl

$$\angle ABC = \angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = 90° - \angle CAD.$$

Trikampis ADC taip pat yra lygiašonis ($AD = DC$), taigi

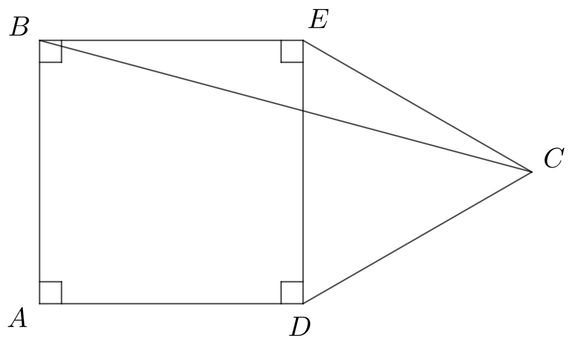
$$\angle CAD = \frac{180° - \angle ADC}{2} = \frac{180° - 150°}{2} = 15°.$$

Dabar galime rasti kampus ABC ir BCD:

$$\angle ABC = 90° - \angle CAD = 90° - 15° = 75°,$$

$$\angle BCD = 360° - \angle ABC - \angle BAD - \angle ADC = 360° - 75° - 90° - 150° = 45°.$$

Antras sprendimas. Keturkampio viršūnes pažymėkime A, B, C ir D, kad gautume $\angle BAD = 90°$, $\angle ADC = 150°$, $BA = AD = DC$. Pažymėkime tokį tašką E, kad keturkampis $ABED$ būtų kvadratas (žr. pav.). Toks taškas egzistuoja, nes $AB = AD$, $\angle BAD = 90°$.



Trikampis CDE yra lygiašonis, nes $CD = AB = DE$. Be to, $\angle CDE = \angle ADC - \angle ADE = 150° - 90° = 60°$. Vadinasi, likę du trikampio CDE kampai yra lygūs $(180° - 60°)/2 = 60°$. Tad šis trikampis lygiakraštis, ir $CE = ED = BE$. Iš čia gauname, kad trikampis BEC yra lygiašonis ir

$$\angle EBC = \frac{180° - \angle BEC}{2} = \frac{180° - (\angle BED + \angle DEC)}{2} = \frac{180° - (90° + 60°)}{2} = 15°.$$

Taigi

$$\angle ABC = \angle ABE - \angle EBC = 90° - 15° = 75°,$$

$$\angle BCD = 360° - \angle ABC - \angle BAD - \angle ADC = 360° - 75° - 90° - 150° = 45°.$$

Ats.: $45°$ ir $75°$.

5 uždavinys. Kelių pirminių (nebūtinai skirtingų) skaičių sandauga yra 10 kartų didesnė už jų sumą S. Raskite visas galimas skaičiaus S reikšmes.

Pirmas sprendimas. Nagrinėkime kokį nors pirminių skaičių rinkinį, tenkinantį uždavinio sąlygą. Kadangi $10 = 2 \cdot 5$, tai šiam rinkiniui priklauso pirminiai skaičiai 2 ir 5. Be to, šiam rinkiniui turi priklausyti dar bent vienas pirminis skaičius. Tegu

$$p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n$$

yra likę šio rinkinio pirminiai skaičiai (tada visas rinkinys yra 2, 5, p_1, p_2, …, p_n, čia $n \geqslant 1$). Pagal uždavinio sąlygą, $10 \cdot (2+5+p_1+\cdots+p_n) = 2 \cdot 5 \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$. Šią lygybę galime perrašyti:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 7 = p_1 p_2 \cdots p_n.$$

Kadangi $p_1 + 7 > p_1$, tai $n \geqslant 2$.

Visiems realiesiems skaičiams $x \geqslant 2$, $y \geqslant 2$ teisinga nelygybė $xy \geqslant x + y$, nes $\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Taikydami šią nelygybę sandaugai $p_1 p_2 \cdots p_{n-1}$, gauname

$$p_1 p_2 \cdots p_{n-1} \geqslant p_1 p_2 \cdots p_{n-2} + p_{n-1} \geqslant p_1 p_2 \cdots p_{n-3} + p_{n-2} + p_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}.$$

Taigi,

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 7 = p_1 p_2 \cdots p_n \geqslant (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) p_n.$$

Pažymėję $s = p_1 + \cdots + p_{n-1}$, paskutinę nelygybę galime perrašyti taip: $s + p_n + 7 \geqslant s p_n$. Iš čia gauname

$$(s-1)(p_n - 1) \leqslant 8.$$

Gautoji nelygybė parodo, kad skaičiai p_n, s, o tuo pačiu ir n, yra gana maži. Todėl toliau galima pamėginti atlikti vienokią ar kitokią visų likusių atvejų perranką.

Perranka sutrumpėja, atmetus $p_n = 2$: jei $p_n = 2$, tai $p_1 = \cdots = p_{n-1} = 2$, vienas iš skaičių $p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 7$ ir $p_1 p_2 \cdots p_n$ nelyginis, o kitas lyginis.

Kadangi $s \geqslant p_1 \geqslant 2$, o skaičius $p_n \geqslant 3$ pirminis, tai lieka tik šios poros (p_n, s), tenkinančios nelygybę $(s-1)(p_n-1) \leqslant 8$:

$$(3,2), \qquad (3,3), \qquad (3,4), \qquad (3,5), \qquad (5,2), \qquad (5,3), \qquad (7,2).$$

Kiekvienu iš 7 atvejų pagal s galime nustatyti p_1, …, p_{n-1} rinkinį. Atitinkamai gauname tokius p_1, …, p_{n-1}, p_n rinkinius:

$$2,3, \qquad 3,3, \qquad 2,2,3, \qquad 2,3,3 \qquad 2,5, \qquad 3,5, \qquad 2,7.$$

(Atveju $(p_n, s) = (3,5)$ atmetėme $p_1 = 5$, nes $p_1 \leqslant p_n$.) Atitinkamai gauname tokias $S = p_1 + \cdots + p_n + 7$ reikšmes:

$$12, \qquad 13, \qquad 14, \qquad 15, \qquad 14 \qquad 15, \qquad 16,$$

bei tokias $p_1 \cdots p_n$ reikšmes:

$$6, \qquad 9, \qquad 12, \qquad 18, \qquad 10, \qquad 15, \qquad 14.$$

Lygybę $S = p_1 \cdots p_n$ gauname tik šeštuoju atveju, kai $n = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$. Pirminių skaičių rinkinys 2, 5, 3, 5 iš tiesų tenkina uždavinio sąlygą.

Taigi tinka vienintelė reikšmė $S = 2 + 5 + 3 + 5 = 15$.

Antras sprendimas. Lygybę

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 7 = p_1 p_2 \cdots p_n, \qquad n \geqslant 2,$$

gavus kaip ir pirmame sprendime, toliau galima mąstyti ir kitaip:

$$2^{n-1} \cdot p_n \leqslant p_1 p_2 \cdots p_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 7 \leqslant n p_n + 7,$$

$$7 \geqslant p_n \cdot (2^{n-1} - n).$$

Nagrinėkime seką

$$2^0 - 1 = 0, \qquad 2^1 - 2 = 0, \qquad 2^2 - 3 = 1, \qquad 2^3 - 4 = 4, \quad \ldots, \quad 2^{k-1} - k, \quad \ldots$$

Jos dviejų gretimų narių skirtumas $(2^k - (k+1)) - (2^{k-1} - k) = 2^{k-1} - 1$ yra teigiamas, kai $k \geqslant 2$. Todėl ši seka be pirmojo nario yra didėjanti. Jei $n \geqslant 4$, tai

$$7 \geqslant p_n \cdot (2^{n-1} - n) \geqslant p_n \cdot (2^3 - 4) = 4p_n.$$

Tada $p_n < 2$ – prieštara. Taigi $n = 2$ arba 3.

Jei $n = 2$, tai $p_1 + p_2 + 7 = p_1 p_2$,

$$(p_1 - 1)(p_2 - 1) = 8, \text{ kur } 0 < p_1 - 1 \leqslant p_2 - 1,$$

$$p_1 - 1 = 1, \quad p_2 - 1 = 8 \quad \text{arba} \quad p_1 - 1 = 2, \quad p_2 - 1 = 4.$$

Pirmuoju atveju skaičius $p_2 = 9$ nėra pirminis. Antruoju atveju gauname $p_1 = 3$, $p_2 = 5$ ir atitinkamą pirminių skaičių rinkinį 2, 5, 3, 5, kuris tenkina uždavinio sąlygą.

Jei $n = 3$, tai $p_1 + p_2 + p_3 + 7 = p_1 p_2 p_3$ ir $7 \geqslant p_3 \cdot (2^2 - 3) = p_3$. Tada $p_3 = 2$, 3, 5 arba 7. Be to, $p_1 p_2 p_3 = p_1 + p_2 + p_3 + 7 \leqslant 7 + 7 + 7 + 7 \leqslant 28$. Tarp 1 ir 28 yra tokios šešios trijų pirminių skaičių sandaugos:

$$8 = 2{\cdot}2{\cdot}2, \qquad 12 = 2{\cdot}2{\cdot}3, \qquad 18 = 2{\cdot}3{\cdot}3, \qquad 20 = 2{\cdot}2{\cdot}5, \qquad 27 = 3{\cdot}3{\cdot}3, \qquad 28 = 2{\cdot}2{\cdot}7.$$

Tačiau atitinkamai

$$8 \neq 2 + 2 + 2 + 7, \qquad 12 \neq 2 + 2 + 3 + 7, \qquad 18 \neq 2 + 3 + 3 + 7,$$

$$20 \neq 2 + 2 + 5 + 7, \qquad 27 \neq 3 + 3 + 3 + 7, \qquad 28 \neq 2 + 2 + 7 + 7.$$

Taigi tinka vienintelė reikšmė $S = 2 + 5 + 3 + 5 = 15$.

Ats.: $S = 15$.