Teorinis turas

Viso 100 taškų

XI – XII klasių (V) grupė

1. Saulės sistema kamuoliniame spiečiuje (15 taškų)

Tarkime, kad Saulės sistema praskrieja tiesiai pro kamuolinio spiečiaus centrą. Šio spiečiaus spindulys $R = 25$ pc, ir jį sudaro 10 milijonų tolygiai pasiskirsčiusių žvaigždžių.

Ar tokiu atveju išliktų nesuardyta planetinė Saulės sistema, jei pasiremtume prielaida, kad ją gali išardyti 100 au nuotoliu ar arčiau nuo Saulės praskriejanti žvaigždė?

Sprendimas

Tikimybė Saulei kertant spiečių prasilenkti su žvaigžde arčiau kaip per 100 au yra lygi pavojingai Saulės sistemos stabilumui spiečiaus tūrio daliai padaugintai iš žvaigždžių spiečiuje skaičiaus.

Kirsdama spiečių per jo centrą Saulė nukeliaus kelią $2R = 50$ pc. Saulės sistemą galinčios išardyti žvaigždės bus tik tos, kurios Saulės kelyje atsidurs arčiau kaip $r = 100$ au $\cong 0{,}0005$ pc nuotolyje. Pavojinga Saulės sistemos stabilumui spiečiaus erdvės dalis gali būti įsivaizduojama kaip r spindulio ir $2R$ ilgio ritinio tūris. Tuo remdamiesi apskaičiuojame, kad tikimybė Saulės sistemai suirti jai skriejant per spiečių yra lygi

$$p = \frac{V_s}{V}N = \frac{2R \cdot \pi r^2 \cdot N}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3r^2 N}{2R^2} = \frac{3 \cdot 0{,}0005^2 \cdot 10 \cdot 10^6}{2 \cdot 25^2} = 0{,}006 = 0{,}6\%$$

Iš čia galime daryti išvadą, kad mažai tikėtina, kad Saulės sistema, skriedama per spiečių, bus suardyta, nes tikimybė, kad jos kelyje mažesniu negu 100 pc atstumu atsidurs nors viena žvaigždė yra lygi 0,6%, t. y., Saulės sistemos nesuirimo tikimybė yra 99,4%.

Atsakymas: 99,4% tikimybė, kad Saulės sistema, kirsdama spiečių, išliks nesuardyta.

2. Galaktikos juodoji skylė (20 taškų)

2022 metais buvo pirmą kartą paskelbta mūsų Galaktikos centre esančios supermasyvios juodosios skylės (vadinamos Šaulio A*, Sgr A* (Sagittarius A*) objektu) aplinkos nuotrauka (2.1 pav.), kuri buvo gauta apdorojus Įvykių horizonto radioteleskopų gardelės (angl. *Event Horizon Telescope (EHT*) – Įvykių horizonto teleskopas – ĮHT) stebėjimų duomenis. Pateiktoje nuotraukoje supermasyvusis objektas visiškai nematomas, o stebimas tik dideliu greičiu aplink jį besisukantis akrecinis diskas.

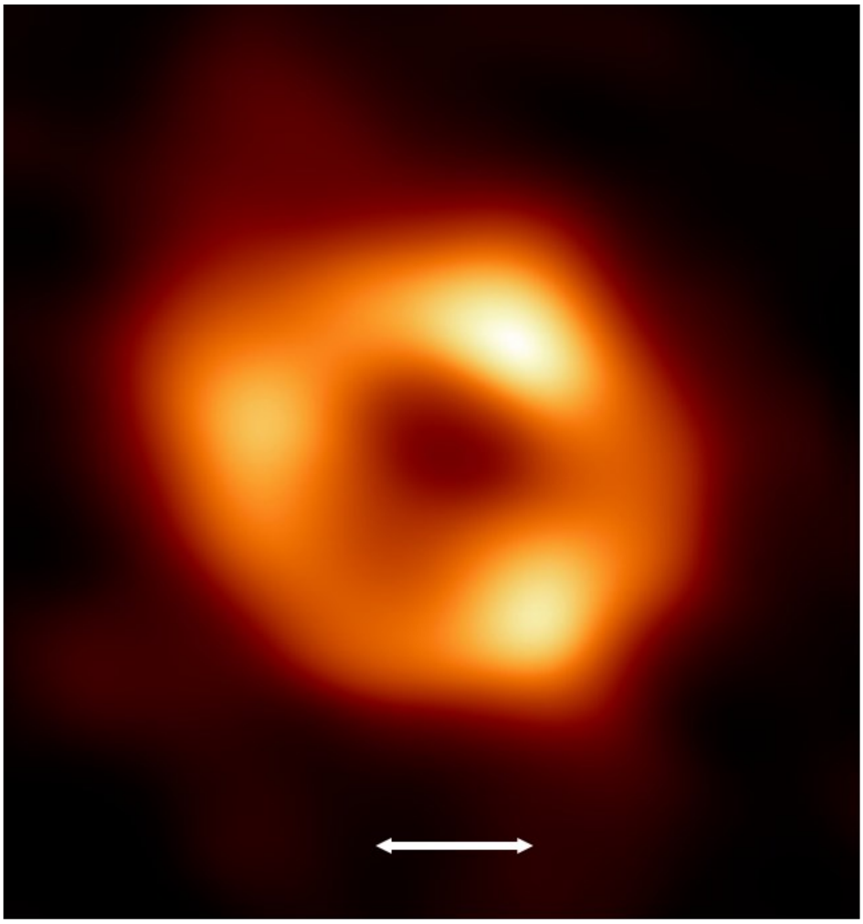
Užduotys

a) Apskaičiuokite ĮHT teorinę kampinę skiriamąją gebą. ĮHT yra 8 radioteleskopų gardelė, veikianti kaip radiointerferometras, kurio maksimali bazė (erdvinis atstumas tarp tolimiausių radioteleskopų) 10700 km. Stebėjimai buvo atliekami 1,3 mm bangos ilgyje.

b) Pasinaudodami 2.1 pav. nuotrauka įvertinkite tamsios vidinės srities, vadinamos juodosios skylės šešėliu, kampinį skersmenį. Atkreipkite dėmesį, kad dėl duomenų apdorojimo specifikos realus akrecinis diskas yra daug siauresnis, nei matoma nuotraukoje. Todėl patariama akrecinio disko skersmenį matuoti maždaug per regimojo žiedo vidurį.

c) Apskaičiuokite juodosios skylės Švarcšildo (*Schwarzschild*) spindulį (kitaip įvykių horizonto spindulį) astronominiais vienetais ir metrais remiantis prielaida, kad juodosios skylės šešėlio skersmuo yra 5 kartus didesnis už jos Švarcšildo spindulį, o atstumas iki Galaktikos centro $d = 8{,}2$ kpc .

d) Juodosios skylės Švarcšildo spindulio (įvykių horizonto spindulio) sąryšis su jos mase išvedamas remiantis bendrąja reliatyvumo teorija. Tačiau tokią pat šio sąryšio algebrinę išraišką galima gauti ir remiantis klasikinės mechanikos dėsniais. Išveskite juodosios skylės Švarcšildo spindulio ir masės sąryšį ir apskaičiuokite juodosios skylės masę Saulės masėmis.



2.1 pav. Pirmoji mūsų Galaktikos juodosios skylės nuotrauka. Juodosios skylės vidinė sritis nematoma, tačiau stebimas reliatyvistiniu greičiu judantis akrecinis diskas. Balta rodyklė apačioje žymi ĮHT teorinę difrakcijos ribojimą kampinę skyrą. [Autoriai: EHT Collaboration]

Sprendimas

a) Radiointerferometro skiriamoji geba apibūdinama ne atskirų teleskopų antenų matmenimis, o bazės ilgiu. Jei b radiointerferometro bazė, o λ registruojamos bangos ilgis, tai šio radiointerferometro kampinė skyra, išreikšta radianais, lygi

$$\theta = \frac{\lambda}{b}.$$

Šioje išraiškoje nėra 1,22 daugiklio, kuris gaunamas skyrą apibrėžiant pagal Reilio kriterijų vienam apskritiminės apertūros teleskopui, nes ĮHT yra radioteleskopų gardelė.

Apskaičiuojame kampinę skyrą:

$$\theta = \frac{0{,}0013}{10700 \cdot 10^3} = 1{,}2 \cdot 10^{-10}\ \text{rad} \cong 0'',000025 = 25\ \text{μas}.$$

Čia μas – kampinės mikrosekundės, 1 μas $= 0'',000001$.

b) Pasiremdami 2.1 pav. parodytu kampinės skyros masteliu įvertiname akrecinio žiedo kampinį skersmenį, kuris apriboja juodosios skylės šešėlį. Gauname, kad šešėlio kampinis skersmuo yra apie du kartus didesnis už ĮHT kampinę skyrą:

$$\theta_{\check{s}e\check{s}} = 2\theta = 2{,}4 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{rad} = 50\ \mu\mathrm{as}.$$

c) Juodosios skylės Švarcšildo spindulio (įvykių horizonto spindulio) apskaičiavimas.
Švarcšildo spindulio kampinis ilgis

$$\theta_S = \frac{\theta_{\check{s}e\check{s}}}{5} = \frac{50}{5} = 10\ \mu\mathrm{as}$$

Linijinis Švarcšildo spindulys

$$R_S = \theta_s d = \frac{10}{10^{-6}}\,8200 = 0{,}082\ \mathrm{au} \cong 1{,}2 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m}$$

d) Juodosios skylės Švarcšildo spindulio (įvykių horizonto spindulio) ir masės sąryšis.
Šį sąryšį galime nustatyti remiantis tokiais samprotavimais. Objekto ribinis pabėgimo greitis (parabolinis greitis) iš centrinio kūno gravitacijos lauko turi būti toks, kad begalybėje jo greitis būtų lygus nuliui. T. y., jo pilnutinė energija (kinetinės ir potencinės energijų suma) turi būti lygi nuliui:

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

Čia v_p – objekto pabėgimo greitis, m – objekto masė, M – centrinio kūno masė, R – jo spindulys, G – gravitacijos konstanta.
Iš čia

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Jei pabėgimo greitis bus lygus šviesos greičiui, $v_p = c$, tai iš kūno traukos lauko negalės ištrūkti ir šviesa. Iš čia ir gauname juodosios skylės Švarcšildo spindulio ir masės sąryšį:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

arba

$$M = \frac{R_S c^2}{2G}$$

$$M = \frac{1{,}2 \cdot 10^{10} \cdot (2{,}9979 \cdot 10^8)^2}{2 \cdot 6{,}6743 \cdot 10^{-11}} \cong 8{,}08 \cdot 10^{36}\ \mathrm{kg} \cong 4 \cdot 10^6\ M_\odot.$$

Atsakymas: a) 0″,000025=25 μas; b) 50 μas; c) 0,082 au=1,2·10^{10} m; d) 4·10^6 $M_\odot$.

3. Dulkelių apvalkalas (25 taškai)

F5 spektrinės klasės milžinę, kurios efektinė temperatūra $T_{ef} = 6410$ K ir spindulys $R = 3{,}8\ R_\odot$, supa sferiškas dulkelių apvalkalas, kurio spindulys $r = 0{,}5$ au ir storis $h = 0{,}01$ au. Dulkelių tankis apvalkale $n = 2000\ \mathrm{m}^{-3}$. Visos apvalkalo dulkelės yra vienodi rutuliukai, kurių spindulys $a = 100$ nm. Jos sudarytos iš silikatinių junginių, kurių tankis $\rho = 2200\ \mathrm{kg\ m}^{-3}$.

Apskaičiuokite:

a) Milžinės šviesį Saulės šviesio vienetais.
b) Apvalkalo masę Saulės masės vienetais.
c) Apvalkalo šviesį Saulės šviesio vienetais.

Sprendimas

a) Milžinės šviesis

$$\frac{L}{L_\odot} = \frac{4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4}{4\pi R_\odot^2 \sigma T_{ef\odot}^4} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T_{ef}}{T_{ef\odot}}\right)^4 = \left(\frac{3{,}8\, R_\odot}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{6410}{5772}\right)^4 \cong 22$$

b) Dulkelių apvalkalo masė

$$\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_\odot} = \frac{4\pi r^2 h\, n \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 \rho}{\mathcal{M}_\odot} = \frac{16\pi^2}{3} \frac{r^2 h\, n \cdot a^3 \rho}{\mathcal{M}_\odot}$$

$$\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_\odot} = \frac{16\pi^2}{3} \frac{(0{,}5 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11})^2 \cdot 0{,}01 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11} \cdot 2000 \cdot (100 \cdot 10^{-9})^3 \cdot 2200}{1{,}989 \cdot 10^{30}} \cong 9{,}7 \cdot 10^{-13}$$

c) Apvalkalo šviesis

Energijos kiekis, kurį iš žvaigždės gauna ir sugeria apvalkalo dulkelė per 1 s:

$$E_{abs} = \frac{4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4}{4\pi r^2} \pi a^2 = \frac{R^2}{r^2} \sigma T_{ef}^4 \cdot \pi a^2$$

Dulkelės išspinduliuojamos energijos kiekis per 1 s:

$$E_{em} = 4\pi a^2 \sigma T_d^4$$

Čia T_d – dulkelės efektinė temperatūra.

Turi būti balansas tarp dulkelės sugeriamos ir išspinduliuojamos energijos:

$$E_{abs} = E_{em}$$

$$\frac{R^2}{r^2} \sigma T_{ef}^4 \cdot \pi a^2 = 4\pi a^2 \sigma T_d^4$$

Iš čia

$$T_d = T_{ef} \sqrt{\frac{R}{2r}} = 6410 \sqrt{\frac{3{,}8 \cdot 6{,}957 \cdot 10^8}{2 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}} \cong 850 \text{ K}$$

Apvalkalo šviesis

$$\frac{L_{apv}}{L_\odot} = \frac{4\pi a^2 \sigma T_d^4 \cdot 4\pi r^2 h\, n}{4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4} = \pi a^2 h\, n \cdot \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T_{ef}}{T_{ef\odot}}\right)^4$$

$$\frac{L_{apv}}{L_\odot} = \pi \cdot 10^{-14} \cdot 1{,}496 \cdot 10^9 \cdot 2000 \cdot 3{,}8^2 \left(\frac{6410}{5772}\right)^4 \cong 2$$

Atsakymas: a) 22 $L_\odot$; b) $9{,}7 \cdot 10^{-13}$ $\mathcal{M}_\odot$; c) 2 $L_\odot$.

4. Kamuolinio spiečiaus tyrimas (25 taškai)

Kamuolinio spiečiaus suminis (integralinis) regimasis ryškis 6,0, paralaksas 0″,000097, regimasis kampinis skersmuo 16′. Tarpžvaigždinė ekstinkcija nereikšminga.

Tarkite, kad visos žvaigždės vienodos, tokios pat kaip Saulė, ir spiečiuje pasiskirsčiusios tolygiai.

Raskite:

a) Spiečiaus atstumą.
b) Spiečiaus linijinį spindulį.
c) Žvaigždžių tūrinį tankį spiečiuje.
d) Vidutinį regimąjį kampinį atstumą tarp žvaigždžių spiečiaus centro kryptimi.
e) Koks turėtų būti mažiausias teleskopo skersmuo, su kuriuo būtų galima pamatyti ir išskirti pavienes spiečiaus žvaigždes?

Nuorodos: Teleskopo skiriamąją gebą skaičiuokite neatsižvelgdami į atmosferos įtaką. Plika akimi matomų žvaigždžių ribinis ryškis 6. Akies vyzdžio skersmuo 6 mm.

Sprendimas

a) Spiečiaus atstumas

$$r = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0{,}000097} = 10309 \text{ pc} \cong 10{,}3 \text{ kpc}$$

b) Spiečiaus linijinis spindulys

$$R = r\frac{\theta}{2\cdot 206265} = 10309\frac{16\cdot 60}{2\cdot 206265} \cong 24 \text{ pc}$$

c) Žvaigždžių tūrinis tankis

Spiečiaus integralinis absoliutusis ryškis

$$M_{spV} = m_{spV} - 5\lg r + 5 = 6{,}0 - 5\lg 10309 + 5 \cong -9{,}07$$

Spiečiaus integralinis šviesis

$$\frac{L_{sp}}{L_{\odot}} = 10^{0{,}4\left(M_{V\odot} - M_{spV}\right)} = 10^{0{,}4(4{,}83+9{,}07)} = 363078$$

Kadangi visos spiečiaus žvaigždės kaip Saulė, tai žvaigždžių skaičius spiečiuje

$$N_{sp} = \frac{L_{sp}}{L_{\odot}} = 363078$$

Žvaigždžių tūrinis tankis

$$\rho_N = \frac{N_{sp}}{V} = \frac{N_{sp}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{363078}{\frac{4}{3}\pi\cdot 24^3} = 6{,}27 \text{ pc}^{-3} \qquad (1)$$

d) Vidutinis regimasis kampinis atstumas tarp spiečiaus žvaigždžių

Spiečiaus žvaigždžių plotinis tankis spiečiaus centro kryptimi

$$N_{\text{pc}} = 2R\rho_N = 2\cdot 24\cdot 6{,}27 = 301{,}0 \text{ pc}^{-2} \qquad (2)$$

Spiečiaus nuotolyje 1×1 pc^2 kvadrato, statmeno regėjimo krypčiai, kraštinės kampiniai matmenys

$$\gamma_1 = \frac{\theta}{2R} = \frac{16\cdot 60}{2\cdot 24} = 20'' \qquad (3)$$

T. y., 1×1 pc^2 linijinį kvadratą atitinka 20″×20″ kampinis plotas.

Kampinis plotas, tenkantis vienai žvaigždei

$$\sigma_1 = \frac{\gamma_1^2}{N_{\text{pc}}} = \frac{20^2}{301} = 1'', 33 \qquad (4)$$

Vidutinis kampinis atstumas tarp žvaigždžių

$$\varepsilon = \sqrt{\sigma_1} = \sqrt{1{,}33} \cong 1'', 15 \qquad (5)$$

Jei sprendžiame algebriniu būdu, tai į (5) formulę įstatome paeiliui (4) – (1) algebrines išraiškas ir gauname:

$$\varepsilon = \theta\sqrt{\frac{\pi}{6N_{sp}}} = 16\cdot 60\cdot\sqrt{\frac{\pi}{6\cdot 363078}} \cong 1'', 15$$

e) Koks mažiausias teleskopas?
Teleskopo kampinė skyra

$$\psi = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

Ribiniu atveju $\varepsilon = \psi$. Tuomet teleskopo skersmuo

$$D = 1{,}22\frac{\lambda}{\varepsilon} = 1{,}22\frac{550\cdot 10^{-9}\cdot 206265}{1{,}15} = 0{,}12\ \mathrm{m}$$

Taigi, spiečiaus žvaigždės bus išskiriamos su teleskopu $D > 0{,}12$ m.
Tačiau ar žvaigždės bus matomos?
Saulės tipo žvaigždės regimasis ryškis spiečiaus nuotolyje bus lygus

$$m_{\odot V} = M_{\odot V} + 5\lg r - 5 = 4{,}83 + 5\lg 10309 - 5 \cong 19{,}9$$

Ribinis ryškis žvaigždžių, kurios regimos su duotu teleskopu:

$$m_{Vt} = m_{Va} + 5\lg\frac{D}{\delta};$$

Čia m_{Va} – plika akimi matomas ribinis žvaigždės ryškis, δ – akies vyzdžio skersmuo, D – teleskopo skersmuo. Iš čia ribinis teleskopo skersmuo lygus

$$D = \delta\cdot 10^{0{,}2(m_{Vt}-m_{Va})} = 0{,}006\cdot 10^{0{,}2(19{,}9-6)} = 3{,}615\ \mathrm{m} \cong 4\ \mathrm{m}$$

Vadinasi, norint išskirti ir pamatyti kamuolinio spiečiaus žvaigždės reikia naudoti apie 4 m teleskopą.

Atsakymas: a) 10,3 kpc; b) 24 pc; c) 6,27 pc^{-3}; d) 1″,15; e) 4 m.

5. Kometos orbita (15 taškų)

Kometos orbitos ekscentricitetas 0,99914, arčiausiai Saulės ji praskrieja 1,1672 au nuotolyje.

Raskite, kiek toliausiai nuo Saulės nuskrieja ši kometa ir prieš kiek metų kometa paskutinį kartą lankėsi prie Žemės?

Sprendimas

Jei kometos elipsės orbitos ekscentricitetas e, orbitos didysis pusašis a, tai kometos nutolis nuo Saulės perihelyje lygus

$$q = a(1-e)$$

Iš čia orbitos didysis pusašis lygus

$$a = \frac{q}{1-e} = \frac{1{,}1672}{1-0{,}99914} = 1357{,}21\ \mathrm{au}$$

Kometos nuotolis nuo Saulės afelyje lygus

$$Q = a(1+e) = 1357{,}21(1+0{,}99914) = 2713{,}25\ \mathrm{au}$$

Kometos orbitinis periodas apskaičiuojamas remiantis 3-uoju Keplerio dėsniu:

$$P = \sqrt{a^3} = \sqrt{1357{,}21^3} \cong 50\ 000\ \text{metų}$$

Atsakymas: Toliausiai nuo Saulės (afelyje) kometa bus 2713 au atstumu; paskutinį kartą prie Žemės lankėsi prieš maždaug 50 000 metų (apskriejimo apie Saulę periodas).