Lietuvos mokinių dvidešimt pirmoji astronomijos olimpiada
Atrankinis etapas
IX-X klasių mokiniai

Viso 70 taškų

1. Žvaigždėtas dangus sausio pabaigoje (10 taškų)

Įsivaizduokite, kad jūs stebėjote žvaigždėtą dangų šių metų sausio 30 dienos vakare praėjus maždaug 1,5 val. po saulėlydžio. Jei atidžiai apžvelgėte visą dangų, tai galite atsakyti į šiuos klausimus:

a) Kokie Zodiako žvaigždynai tuo metu buvo matomi? Užrašykite jų lietuviškus pavadinimus ir lotyniškas santrumpas iš eilės nuo vakarų į rytus.
b) Kokios planetos ir kuriame žvaigždyne jos buvo matomos stebėjimo metu?
c) Kokiame žvaigždyne tuo metu buvo zenitas?
d) Ar buvo matomas Mėnulis? Jei taip, tai kokia jo fazė ir kokiame žvaigždyne buvo matomas?
e) Kokie žvaigždynai tuo metu buvo apatinėje kulminacijoje?
f) Koks tuo metu buvo žvaigždinis laikas?
g) Nurodykite savo vietovės geografines koordinates.

Patarimas: Pasinaudokite virtualaus dangaus (planetariumo) programa.

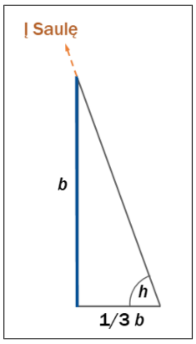
Sprendimas

a) Vandenis (Aqr), Žuvys (Psc), Avinas (Ari), Tauras (Tau), Dvyniai (Gem), Vėžys (Cnc).
b) Venera [Vandenyje], Jupiteris [Žuvyse], Uranas [Avine], Marsas [Taure].
c) Persėjas (Per).
d) Taip, Tauro (Tau) žv. Priešpilnis.
e) Jaučiaganis (Boo), Slibinas (Dra), Mažieji Grįžulo Ratai (UMi)
f) $s \approx 2^{\mathrm{h}}40^{\mathrm{m}}$
g) Vilnius $\varphi = 54°41'$; $\lambda = 25°19'$.
Kaunas $\varphi = 54°54'$; $\lambda = 23°56'$
Klaipėda $\varphi = 55°43'$; $\lambda = 21°08'$
Šiauliai $\varphi = 55°56'$; $\lambda = 23°19'$

2. Geografinė platuma (10 taškų)

Vienoje vietovėje vasaros saulėgrįžos vidurdienį vertikalaus strypo metamo šešėlio ilgis buvo lygus trečdaliui šio strypo ilgio. Kokia vietovės geografinė platuma?

Sprendimas



Kampas h rodo Saulės aukštį stebėjimo momentu.

Iš strypo ir šešėlio ilgių (žr. pav.) santykio apskaičiuojame kampą h, t. y. Saulės aukštį virš horizonto:

$$\mathrm{tg}\, h = \frac{b}{1/3\, b} = 3$$

$$h = 71°34'$$

Saulės deklinacija vasaros saulėgrįžą: $\delta = 23°26'$. Vadinasi, Saulė bus zenite geografinėje platumoje $\varphi_Z = 23°26'$.

a) Jei stebėtojas bus platumoje $\varphi_S > \varphi_Z$, Saulė kulminuos į pietus nuo zenito. Tuomet jos aukštis vidurdienį bus lygus

$$h = 90° - \varphi_S + \delta$$

Iš čia

$$\varphi_S = 90° - h + \delta = 90° - 71°34' + 23°26' = 41°52'$$

b) Jei stebėtojas bus platumoje $0 < \varphi_S < \varphi_Z$, Saulė kulminuos į šiaurę nuo zenito. Tuomet jos aukštis vidurdienį bus lygus

$$h = 90° + \varphi_S - \delta$$

Iš čia

$$\varphi_S = -90° + h + \delta = -90° + 71°34' + 23°26' = 5°0'$$

Atsakymas: $41°52'$ arba 5°.

3. Šuolis nuo asteroido (15 taškų)

Žemėje tam tikru greičiu atsispyręs nuo paviršiaus žmogus gali pašokti į $h = 0{,}5$ m aukštį. Kokio galėtų būti didžiausio spindulio asteroidas, nuo kurio paviršiaus į viršų tuo pačiu greičiu, kaip ir Žemėje, atsispyręs žmogus nebenusileistų? Tarkite, kad asteroido vidutinis tankis yra toks pat, kaip ir Žemės vidutinis tankis.

Sprendimas

Nuo asteroido paviršiaus į viršų pašokęs žmogus nebenusileis, jei jo greitis pašokimo momentu bus lygus paraboliniam (pabėgimo arba 2-ajam kosminiam) greičiui asteroido atžvilgiu. Taigi, reikės palyginti žmogaus greitį, įgytą Žemėje, su paraboliniu greičiu asteroido atžvilgiu.

Žemėje pašokusiam žmogui taikoma energijos tvermės dėsnio išraiška:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh; \tag{3.1}$$

čia v – atsispyrimo greitis, m – žmogaus masė, g – laisvojo kritimo pagreitis, o h – pakilimo aukštis.

Laisvojo kritimo pagreitis, išreikštas per Žemės masę ir spindulį, lygus

$$g = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2},$$

čia G – gravitacijos konstanta, $M_\oplus$ – Žemės masė ir $R_\oplus$ – Žemės spindulys.

Įstatę šią išraišką į (3.1) lygtį gauname:

$$v^2 = \frac{2GM_\oplus h}{R_\oplus^2}. \tag{3.2}$$

Žmogui, judančiam paraboliniu greičiu v_p asteroido atžvilgiu, galioja tokia energijos tvermės dėsnio išraiška:

$$\frac{mv_p^2}{2} = \frac{GMm}{R};$$

čia M – asteroido masė, o R – ieškomasis asteroido spindulys.

Iš čia

$$v_p^2 = \frac{2GM}{R}. \tag{3.3}$$

Kadangi pagal uždavinio sąlygą (3.2) ir (3.3) formulių greičiai turi būti lygūs, tai juos sulyginę gauname:

$$\frac{M}{R} = \frac{M_\oplus h}{R_\oplus^2}. \tag{3.4}$$

Asteroido masė

$$M = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Žemės masė

$$M_\oplus = \rho V_\oplus = \rho \frac{4}{3}\pi R_\oplus^3.$$

Čia ρ – Žemės ir asteroido tankis.

Šias masių išraiškas įstatome į (3.4) formulę ir gauname:

$$R^2 = hR_\oplus$$

Iš čia

$$R = \sqrt{hR_\oplus} = \sqrt{0{,}5 \cdot 6{,}378 \cdot 10^6} \cong 1800 \text{ m}$$

Atsakymas: 1800 m.

4. Asteroido orbita (20 taškų)

Asteroido sinodinis periodas lygus 450,6342 dienų. Raskite asteroido orbitos didįjį pusašį astronominiais vienetais dviejų ženklų po kablelio tikslumu.

Sprendimas

Orbitos didįjį pusašį galima surasti iš 3-ojo Keplerio dėsnio:

$$a^3 = P^2;$$

čia a – didysis pusašis astronominiais vienetais, o P – orbitinis periodas Žemės metais.

Asteroido sinodinį periodą S Žemės atžvilgiu, jo orbitinį (žvaigždinį) periodą P ir Žemės orbitinį (žvaigždinį) periodą $P_\oplus$ sieja sinodinio judėjimo lygtis.

a) Jei asteroidas skrieja toliau nuo Saulės negu Žemė, tai sinodinio judėjimo lygtis tokia:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P_\oplus} - \frac{1}{P}. \tag{4.1}$$

b) Jei asteroidas skrieja arčiau Saulės negu Žemė, tai sinodinio judėjimo lygtis tokia:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{P_\oplus}. \tag{4.2}$$

a) atvejis. Asteroido orbitinį periodą skaičiuojame naudodami (4.1) formulę.

$$P = \frac{SP_\oplus}{S - P_\oplus} = \frac{450{,}6342 \cdot 365{,}2564}{450{,}6342 - 365{,}2564} = 1927^{\mathrm{d}}{,}8668 = 5{,}2781 \text{ metų}.$$

Asteroido orbitos didysis pusašis lygus

$$a = \sqrt[3]{P^2} = \sqrt[3]{5{,}2781^2} = 3{,}03 \text{ au}.$$

b) atvejis. Asteroido orbitinį periodą skaičiuojame naudodami (4.2) formulę.

$$P = \frac{SP_\oplus}{S + P_\oplus} = \frac{400{,}6342 \cdot 365{,}2564}{400{,}6342 + 365{,}2564} = 201^{\mathrm{d}}{,}7391 = 0{,}5523 \text{ metų}.$$

Asteroido orbitos didysis pusašis lygus

$$a = \sqrt[3]{P^2} = \sqrt[3]{0{,}5523^2} = 0{,}67 \text{ au}.$$

Atsakymas: Jei asteroidas skrieja toliau nuo Saulės negu Žemė, jo orbitos didysis pusašis lygus 3,03 au, o jei arčiau – 0,67 au.

5. Dimorphos orbitos pokytis (15 taškų)

2022 metais zondas DART trenkėsi į asteroidą Dimorphos, kuris skrieja aplink kitą asteroidą Didymos. Dėl smūgio Dimorphos apskriejimo aplink Didymos periodas sutrumpėjo 32 ± 2 minučių. Prieš smūgį jo orbitinis periodas buvo 11 valandų 55 minutės 18 sekundžių. Raskite dešimtosios procento dalies tikslumu, kiek po smūgio galėjo pakisti Dimorphos orbitos didysis pusašis?

Sprendimas

Dimorphos orbitinis periodas sekundėmis:

$$P = 11 \cdot 3600 + 55 \cdot 60 + 15 = 42915\ \text{s}.$$

Orbitos periodas sutrumpėjo nuo 30 iki 34 min, t.y., nuo $\Delta t_{\min} = 1800$ s iki $\Delta t_{\max} = 2040$ s. Remdamiesi 3-uoju Keplerio dėsniu apskaičiuojame:

$$\frac{a_1^3}{P_1^2} = \frac{a_2^3}{P_2^2};$$

$$a_2 = a_1 \sqrt[3]{\frac{P_2^2}{P_1^2}} = a_1 \sqrt[3]{\frac{(P_1 - \Delta t)^2}{P_1^2}}.$$

$\Delta t_{\min}$ atveju:

$$a_2 = a_1 \sqrt[3]{\frac{(42915 - 1800)^2}{42915^2}} \approx 0{,}972 a_1,$$

t. y. didysis pusašis sutrumpėjo 0,028 dalimi (2,8%).

$\Delta t_{\max}$ atveju:

$$a_2 = a_1 \sqrt[3]{\frac{(42915 - 2040)^2}{42915^2}} \approx 0{,}968 a_1,$$

t. y. didysis pusašis sutrumpėjo 0,032 dalimi (3,2%).

Atsakymas: Dimorphos orbitos didysis pusašis galėjo sutrumpėti nuo 2,8% iki 3,2%.