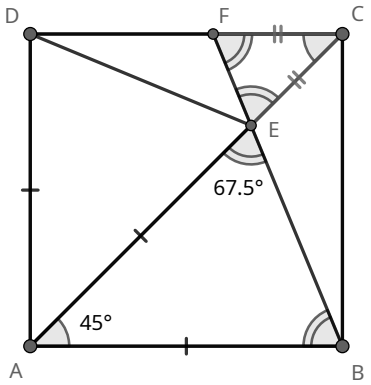
Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Savivaldybių etapo užduočių sprendimai

2025 m.

9-10 klasių sprendimai

1 uždavinys. Duotas kvadratas $ABCD$, kurio kraštinės ilgis 1. Ant kvadrato įstrižainės AC pažymėtas taškas E toks, kad $AE = AD$, o spindulys BE kerta kraštinę CD taške F. Raskite atkarpos DF ilgį.



Sprendimas. $AE = AD = AB$ ir $\angle BAC = 45°$, taigi $\triangle BAE$ yra lygiašonis ir $\angle FEC = \angle AEB = \frac{180°-45°}{2} = 67.5°$. $\angle EFC = 180° - \angle FEC - \angle ECF = 180° - 67.5° - 45° = 67.5°$, taigi ir $\triangle ECF$ yra lygiašonis ir $CF = CE$. Taigi $DF = CD - CF = CD - CE = CD - (AC - AE) = 2AB - AC = 2 - \sqrt{2}$.

Pastaba. Nustatyti, kad $CF = CE$ galime ir nenurodydami konkrečių kampų: $\angle ABE = \angle EFC$ ir $\angle BAE = \angle ECF$ (vidaus priešiniai kampai), taigi trikampiai $\triangle BAE$ ir $\triangle FCE$ yra panašūs.

Ats.: $DF = 2 - \sqrt{2}$.

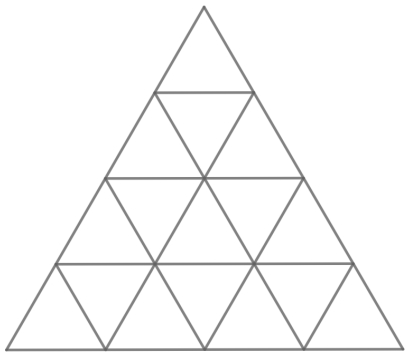
2 uždavinys. Hilberto viešbutyje yra n aukštų ir kiekviename gyvena po vieną svečią.

Hilbertas nusprendė perskirstyti svečius į kitus kambarius (taip, kad galbūt po perskirstymo keli svečiai gyvens tame pačiame aukšte). Bet kuris svečias nebus patenkintas, jei žemiau jo gyvenęs svečias po perskirstymo būtų apgyvendintas aukščiau jo.

Jei Hilbertui pavyko svečius perskirstyti taip, kad visi buvo patenkinti, įrodykite, kad bent vienas svečias liko gyventi tame pačiame aukšte.

Sprendimas. Pavadinkime A aukščiausiai gyvenusį svečią, perkeltą aukštyn (jei toks neegzistuoja, tada pirmame aukšte gyvenęs svečias liko gyventi pirmame aukšte, taigi sąlyga patenkinta). Pavadinkime B svečią, prieš perskirstymą gyvenusį vienu aukštu aukščiau, nei A (toks svečias egzistuoja, nes kitaip A prieš perskirstymą būtų gyvenęs n-ajame aukšte ir jo nebūtų įmanoma perkelti aukštyn). B nebuvo perkeltas aukštyn, nes jis gyveno aukščiau nei A (kitaip būtų prieštara svečio A apibrėžimui), ir B nebuvo perkeltas žemyn, nes kitaip jis būtų nepatenkintas, kad A apsigyveno virš jo. Tada B yra ieškomas svečias.

3 uždavinys. Į kiekvieną trikampės lentelės langelį (žr. pav.) įrašyta po skaičių taip, kad bet kuriuose dviejuose gretimuose langeliuose esančių skaičių skirtumo modulis yra 1, bei centriniame langelyje įrašytas skaičius 0. Visų lentelėje esančių skaičių sumą pažymime S. (Du langeliai laikomi gretimais, jei jie turi bendrą kraštinę).



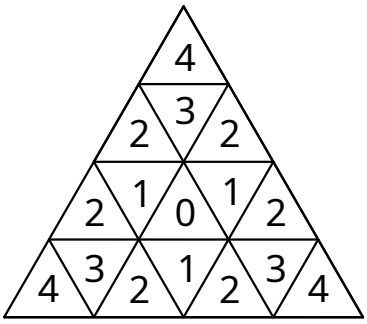
(a) Ar egzistuoja tokia lentelė, jog $S = 5$?

(b) Raskite visas galimas S reikšmes.

Sprendimas. Pastebėkime, kad gretimuose lentelės langeliuose skaičių lyginumas skiriasi. Taigi gretimuose centriniam langeliui $\bigtriangledown$ langeliuose galima įrašyti tik po nelyginį skaičių, gretimuose jiems $\bigtriangleup$ langeliuose tik po lyginį ir t.t., kol į visus $\bigtriangledown$ įrašome po nelyginį skaičių, o į $\bigtriangleup$ - po lyginį. Kadangi $\bigtriangledown$ yra 6, tai visų skaičių suma yra lyginė. Taigi:

(a) Tokia lentelė neegzistuoja.

(b) Didžiausia galima suma yra 36, kai į gretimus centriniam langeliui langelius įrašome po 1, į jiems gretimus tuščius langelius po 2 ir t.t. (žr. pav.). Atitinkamai surašius neigiamus skaičius, gauname mažiausią sumą -36. Pastebėkime, kad kol didžiausias skaičius lentelėje yra teigiamas, jį sumažinus per 2 lentelė vis dar atitiks sąlygą (jei didžiausias skaičius yra 0 tai nebūtinai yra tiesa, nes negalime pakeisti centrinio langelio skaičiaus). Taip mažindami sumą po 2 galime gauti lenteles su kiekviena suma $S = 34, 32, \ldots, 0$. Jei lentelėje pakeičiame visus skaičius į priešingus, lentelė taip pat vis dar atitinka sąlygą, o suma tampa priešinga, taigi galimos ir visos sumos $S = -2, -4, \ldots, -34$. Taigi galimos visos lyginės sumos nuo -36 iki 36.



Ats.: a) ne; b) $S \in \{-36, -34, -32 \ldots, 32, 34, 36\}$.

4 uždavinys. Žr. 11-12 klasių 2 uždavinio sprendimą.

5 uždavinys. Realieji skaičiai x ir y tenkina lygtis:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = x^2y^2 + x^2 \\ y^6 + x^3y^3 = x^5y^2 + x^5 \end{cases}$$

Raskite visas galimas $x - y$ reikšmes.

Pirmas sprendimas. Padauginę pirmąją lygtį iš x^3 ir sudėję abi lygtis gauname:

$$x^6 + 2x^3y^3 + y^6 = 2x^5y^2 + 2x^5$$
$$(x^3 + y^3)^2 = 2x^5(y^2 + 1)$$

Jei $x = 0$ ir, įsistatę į bet kurią pradinę lygtį $x = 0$ gauname, kad ir $y = 0$.

Jei $x \neq 0$, tai kadangi $y^2 + 1 > 0$ visiems realiesiems y, dešinioji lygybės pusė nelygi 0. O tai reiškia, kad ir $x^3 + y^3 \neq 0$, taigi būtinai ir $x \neq -y$.

Padauginę pirmąją lygtį iš x^3 ir atėmę antrąją lygtį iš pirmos gauname $x^6 - y^6 = 0$, taigi $x^3 = \pm y^3$, arba $x = \pm y$. Jei $x = -y$, tai $x = y = 0$ ir $x - y = 0$, o jei $x = y$, tai $x - y = 0$.

$x = y = 0$ sprendinys lygčių sistemą atitinka, taigi $x - y = 0$ reikšmė yra galima.

Antras sprendimas. Padauginę pirmąją lygtį iš y^3 ir atėmę antrąją lygtį iš pirmos gauname:

$$0 = y^3x^2(y^2 + 1) - x^5(y^2 + 1) = (x^3 - y^3)x^2(y^2 + 1)$$

Kadangi $y^2 + 1 > 0$ visiems realiesiems y, tai arba $x = 0$ ir, įsistatę į bet kurią lygtį $x = 0$ gauname, kad ir $y = 0$, arba $x^3 = y^3$, taigi $x = y$ ir $x - y = 0$.

$x = y = 0$ sprendinys lygčių sistemą atitinka, taigi $x - y = 0$ reikšmė yra galima.

Ats.: $x - y = 0$.

11-12 klasių sprendimai

1 uždavinys. Suraskite visus sveikųjų skaičių trejetus tenkinančius:

$$\begin{aligned} xy &= y - z \\ yz &= z - x \\ zx &= x - y \end{aligned}$$

Sprendimas. Pertvarkome lygtis į:

$$\begin{aligned} (x-1)y &= -z \\ (y-1)z &= -x \\ (z-1)x &= -y \end{aligned}$$

Šias tris lygtis sudauginę gauname lygtį:

$$xyz(x-1)(y-1)(z-1) = -xyz$$

Nagrinėkime du atvejus:

(a) Jei $xyz \neq 0$, galime aukščiau esančią lygtį padalinti iš xyz, gaudami $(x-1)(y-1)(z-1) = -1$, o paėmę abiejų pusių modulį gauname $|x-1| \cdot |y-1| \cdot |z-1| = 1$.
Skaičiai x, y ir z sveikieji, taigi $|x-1|, |y-1|$ ir $|z-1|$ – natūralieji, o kadangi jų sandauga lygi 1, tai ir $|x-1| = |y-1| = |z-1| = 1$. Kadangi nagrinėjame atvejį, kai x, y ir z nenuliniai, tai aukščiau esančią modulių lygybę gali tenkinti tiktai $x = y = z = 2$, bet $2 \cdot 2 \neq 2 - 2$, taigi tokios vertės netenkina pradinės lygčių sistemos. Reiškia, tokių sistemos sprendinių, kad $xyz \neq 0$, nėra.

(b) Kai $xyz = 0$, tai bent vienas iš x, y arba z yra 0. Nemažinant bendrumo, tarkime, kad $y = 0$, tada įstačius į pirmąją lygtį gauname $x \cdot 0 = 0 - z$, taigi ir $z = 0$, o tokiu atveju antroji lygtis tampa $0 \cdot 0 = 0 - x$, reiškia ir $x = 0$. Taigi, jei $xyz = 0$, tai $x = y = z = 0$.

Taigi vieninteliai lygčių sistemos sprendiniai yra $x = y = z = 0$.

Ats.: $x = y = z = 0$.

2 uždavinys. Sveikieji neneigiami skaičiai x ir y tenkina lygtį $x^2 + y^2 = 2025$ bei $x \leq y$. a) Raskite bent vieną tokių skaičių x ir y porą; b) Raskite visas tokias skaičių x ir y poras.

Sprendimas. Pradžioje įrodysime teiginį, kad jei dviejų sveikųjų skaičių kvadratų suma dalijasi iš 3, tai ir abu sumos nariai yra dalūs iš 3.

Visų pirma, pastebėkime, kad kiekvienas kvadratas dalijasi iš trijų su liekana 0 arba 1. Norėdami tuo įsitikinti, pastebėkime: jei sveikasis skaičius dalijasi iš 3 su liekana r, tai jo kvadratas dalijasi iš 3 su ta pačia liekana kaip skaičius r^2. Kadangi kvadratų $0^2, 1^2, 2^2$ dalybos iš 3 liekanos yra atitinkamai 0, 1 ir 1, tai jokio kvadrato dalybos iš 3 liekana negali būti kitokia.

Reiškia, bet kurių sveikųjų skaičių n^2 ir m^2 liekanos dalijant iš 3 yra 0 arba 1. Taigi vienintelė abiejų liekanų kombinacija, su kuria $n^2 + m^2$ dalijasi iš 3, yra ta, kai tiek n^2, tiek m^2 dalijasi iš 3 su liekana 0. Tuo pačiu, kadangi 3 yra pirminis skaičius, dalijantis n^2 bei m^2, tai 3 dalija ir n, ir m, nes priešingu atveju jų kvadratai nesidalytų.

Toliau pritaikykime aukščiau įrodytą teiginį, pastebėdami, kad $2025 = 9^2 \cdot 5^2$ yra dalus iš 3. Taigi ir $x^2 + y^2$ yra dalus iš 3. Reiškia, x ir y abu dalūs iš 3, todėl galime išreikšti $x = 3a$ ir $y = 3b$, kur a ir b yra sveikieji skaičiai. Tai įstatę į pradinę lygtį, gauname:

$$9a^2 + 9b^2 = 2025$$

O padalinus iš 9:

$$a^2 + b^2 = 225 = 3^2 \cdot 5^2$$

Kairė lygybės pusė yra kvadratų suma, o dešinė dalijasi iš 3. Taigi, taikydami tą patį samprotavimą, gauname, kad $a = 3c$ ir $b = 3d$, kur c ir d sveikieji. Juos įstačius į lygtį gauname:

$$9c^2 + 9d^2 = 225$$

O padalijus iš 9:

$$c^2 + d^2 = 25$$

Šią lygtį baigiame spręsti perrinkdami visus įmanomus sprendinius. Kadangi $c^2 \leq 25$, tai $c^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$. Atitinkamos $25 - c^2$ reikšmės būtų $\{25, 24, 20, 16, 9, 0\}$, o tarp jų kvadratai yra tik $25, 16, 9$ ir 0. Taigi galimi sprendiniai yra:

$$0^2 + 5^2 = 25, \quad 3^2 + 4^2 = 25.$$

O tai, padauginant iš $9 \cdot 9$, duoda ir visus pradinės lygties sprendinius:

$$0^2 + 45^2 = 27^2 + 36^2 = 2025$$

Ats.: $(x, y) \in \{(0, 45), (27, 36)\}$

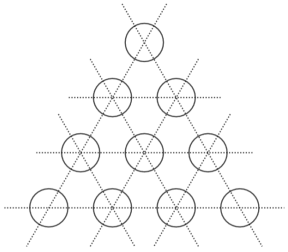
3 uždavinys. Tegul ant stalo ratu sudėliota kažkiek svarelių, ir ant kiekvieno užrašyta „K“ arba „D“. Jeigu ant svarelio yra raidė „K“, tai jis dedamas ant kairės svarstyklių pusės, o jei „D“, tai ant dešinės. Tarkime, kad sudėjus visus svarelius ant svarstyklių (ant tų pusių kaip pažymėta ant svarelių), svarstyklės lieka pusiausvyros. Įrodykite, kad galime rasti tokį svarelį, nuo kurio vieną po kito dedant svarelius (ant jų atitinkamų pusių) pagal laikrodžio rodyklę, svarstyklės niekada nenusvirtų į dešinę pusę (pusiausvyra galima).

Sprendimas. Pažymėkime svarelių skaičių n ir pradedant nuo kažkurio svarelio sunumeruokime juos visus pagal laikrodžio rodyklę skaičiais nuo 1 iki n. Pažymėkime taip pat d_i, kiek i-tuoju numeriu pažymėtas svarelis pats iš savęs nusveria svarstykles į dešinę (jei svarelį dedame į dešinę, tai svarelio masė yra d_i, jei į kairę, tai $-d_i$).

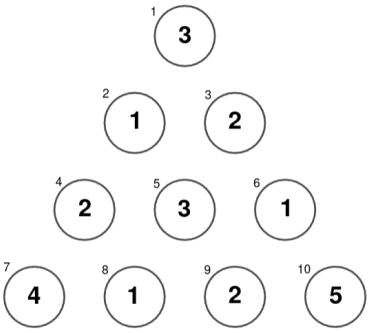
Pirmiausia pabandykime dėlioti svarelius, pradėdami pirmu numeriu pažymėto ir dėkime visus svarelius pagal laikrodžio rodyklę. Kiekvienam k nuo 1 iki n pažymėkime $D_k = d_1 + d_2 + \cdots + d_k$. Tegu skaičius m toks, jog $D_m \geq D_k$ visiems k, kitaip tariant, tai toks (nebūtinai unikalus) m, kada svarstyklės yra labiausiai nusvirusios į dešinę.

Jei $m = n$, tai pagal sąlygą $D_m = 0$ gauname $D_k \leq D_m = 0$ visiems k, ir svarstyklės niekada nebuvo nusvirusios į dešinę pusę. Priešingu atveju mėginkime sudėti svarelius antrą kartą, pradėdami nuo $m+1$-ojo svarelio. Dedant svarelius nuo $m + 1$-ojo iki n-tojo, svarstyklės niekada nenusvirs į dešinę, nes jei nusvirtų ties kažkokiu k kuriam $m+1 \leq k \leq n$, tai svarstyklės yra nusvirusios į dešinę per $D_k - D_m > 0$, kas prieštarauja m apibrėžimui. Toliau dedant svarelius nuo svarelio pažymėto pirmu numeriu iki m-tojo svarstyklės taip pat nenusvirs į dešinę pusę, nes jei tai nutiktų ties kažkokiu k, kur $1 \leq k \leq m$, tai tada jos nusvirusios į dešinę per $0 < (D_n - D_m) + D_k = D_k - D_m$, vėl prieštara m apibrėžimui. Vadinasi $m + 1$-asis svarelis tenkina sąlygą.

4 uždavinys. Į kiekvieną iš 10 apskritimų (žr. pav.) surašyta po natūralųjį skaičių taip, kad kiekvienoje horizontalioje arba 60° pasuktoje (į bet kurią pusę) nuo horizontalios tiesėje visi skaičiai būtų skirtingi. Ar gali tų skaičių suma būti a) 24 b) 23?

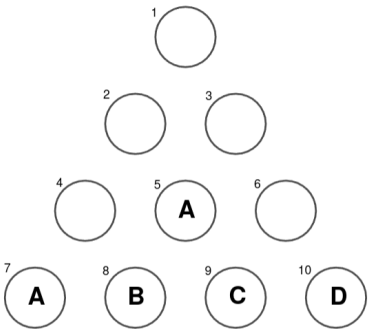


Sprendimas. a) Suma 24 yra galima. Pavyzdžiui, skaičius galima surašyti taip:

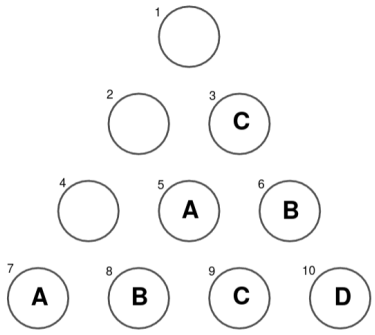


b) Suma 23 yra negalima. Pradžioje parodysime, kad lentelėje turi būti įrašytos bent penkios skirtingos reikšmės.

Tarkime, apatinėje eilutėje esančios reikšmės yra A, B, C ir D. Kadangi jos visos yra vienoje eilutėje, jos privalo būti skirtingos. Jei lentelę būtų galima užpildyti tik šiomis keturiomis reikšmėmis, viena iš jų turėtų būti viduriniame apskritime. Kadangi vidurinis apskritimas yra tiesėse su B ir C, jame gali būti tik A arba D. Tad, nemažindami bendrumo, tarkime, kad jame yra A:



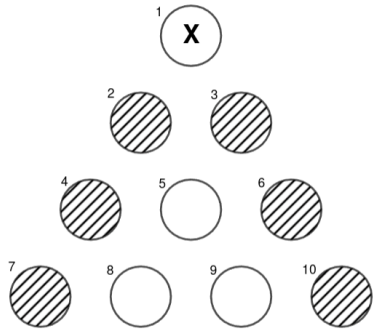
Tuo atveju 6-ajame apskritime negali būti įrašyta nei A, nei C, nei D, nes šios reikšmės jau yra per jį einančiose tiesėse. Taigi jame gali būti tik B. Panašiai, 3-ajame apskritime gali būti tik C, nes B ir A jau įrašyti vienoje per jį einančioje tiesėje, o D įrašyta kitoje:



Tačiau tada per viršutinį apskritimą eina viena tiesė su verte A ir kita su vertėmis C, B ir D. Todėl viršutiniame apskritime negalime įrašyti nei vienos iš šių keturių reikšmių. Taip parodėme, kad lentelėje turi būti bent penkios skirtingos reikšmės.

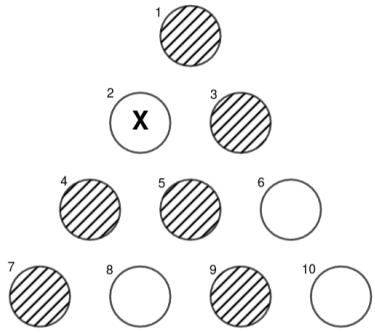
Užpildymo penkiomis reikšmėmis pavyzdys pateiktas a) dalyje, tačiau lieka parodyti, kad nėra kitų užpildymų su suma, mažesne nei 24. Tą padarysime įrodydami, kad kiekviena reikšmė lentelėje pasirodo daugiausiai tris kartus.

Jei reikšmė X pasirodo kampiniame (t. y. 1-ajame, 7-ajame ar 10-ajame) apskritime, ji negali pasirodyti dviejose kraštinėse, einančiose per tą apskritimą:



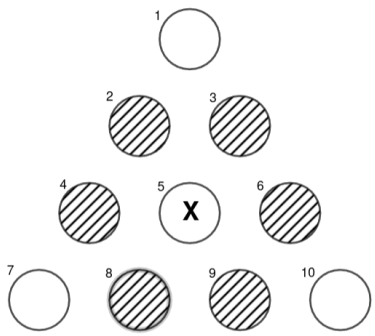
Reiškia, reikšmė X gali pasirodyti tik likusiuose trijuose apskritimuose. Tačiau per bet kuriuos du iš jų eina po tiesę, tad X gali būti tik viename iš šių trijų. Taigi kampiniame apskritime pasirodanti reikšmė gali iš viso pasirodyti tik 2 kartus.

Jei reikšmė X pasirodo kraštiniame (t. y. 2-ajame, 3-ajame, 4-ajame, 6-ajame, 8-ajame ar 9-ajame) apskritime, X negali būti nei vienoje iš 3 per jį einančių tiesių. Taigi X gali pasirodyti tik viename iš trijų likusių apskritimų:



Tačiau šie trys apskritimai guli dviejose tiesėse. Todėl kiekvienoje tiesėje gali būti daugiausiai po vieną reikšmę X. Reiškia, jei X guli kraštiniame apskritime, visoje lentelėje X gali pasikartoti daugiausiai 3 kartus.

Jei X guli centriniame (t. y. 5-ajame) apskritime, jį supantys šeši apskritimai guli vienoje tiesėje su centriniu, tad juose negali būti X:



Reiškia, X galėtų dar būti tik kampiniuose apskritimuose. Tačiau, kaip jau aptarėme anksčiau, kampiniuose apskritimuose vertės nesikartoja. Todėl daugiausiai viename iš jų gali būti X. Taigi, jei centriniame apskritime yra X, tai lentelėje X gali pasirodyti daugiausiai 2 kartus.

Kadangi kiekvienas apskritimas yra kampinis, kraštinis arba centrinis, ir visais atvejais gauname, kad jame esanti reikšmė kartojasi daugiausiai 3 kartus, reiškia, jokia reikšmė lentelėje negali kartotis daugiau nei 3 kartus.

Taigi lentelėje yra bent penkios skirtingos reikšmės, ir kiekviena jų kartojasi daugiausiai tris kartus.

Dabar galime parodyti, kad suma privalo viršyti 23. Kaip bebūtų užpildyta lentelė, surašius joje esančius 10 skaičių nemažėjimo tvarka $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_9 \leq a_{10}$, galime pastebėti, kad:

- Kadangi visi skaičiai yra natūralieji, a_1, a_2 ir a_3 yra nemažesni nei 1.
- Taip pat $2 \leq a_4$. Jei būtų priešingai, t. y. $a_4 = 1$, kadangi pirmi trys skaičiai nedidesni už ketvirtą $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$, bet tada reikšmė 1 lentelėje kartojasi 4 kartus, o taip negali būti.
- Kadangi $2 \leq a_4$, tai ir a_5 bei a_6 yra nemažesni nei 2.
- $3 \leq a_7$. Taip yra, nes priešingu atveju $a_7 = 2$, o tai reiškia, kad iš pirmųjų šešių reikšmių daugiausiai dar dvi yra 2, bet tada pirmos keturios turėtų būti 1, o taip negali būti.
- Kadangi $3 \leq a_7$, tai ir $3 \leq a_8$.
- $4 \leq a_9$, nes priešingu atveju $a_9 = 3$, bet tada tarp pirmųjų devynių skaičių būtų tik trys skirtingos reikšmės. Reiškia, su dešimtu skaičiumi jų būtų daugiausiai keturios, o jų turi būti bent penkios.
- Panašiai $5 \leq a_{10}$, nes kitaip būtų tik keturios skirtingos reikšmės, o jų turi būti bent penkios.

Pasinaudodami šiais įverčiais galime įvertinti sumą, t. y.

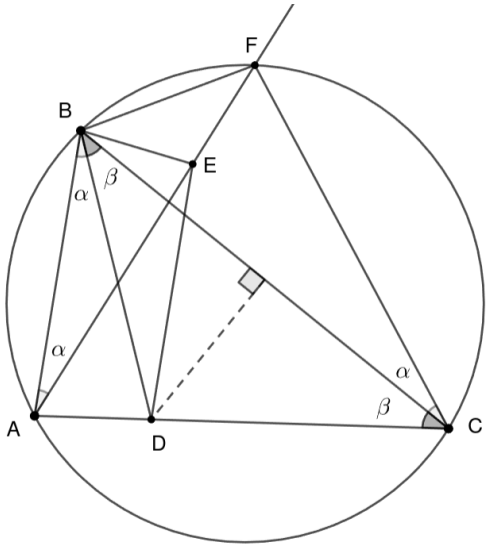
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \geq 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 = 24.$$

Reiškia, suma negali būti mažesnė nei 24, ką ir reikėjo įrodyti.

Ats.: a) taip; b) ne.

5 uždavinys. Tegul duotas smailusis trikampis ABC. Kraštinės BC vidurio statmuo kerta kraštinę AC taške D. Tegu taškas E pažymėtas taip, kad $ADEB$ yra lygiašonė trapecija. Jei spindulio AE ir apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo sankirtos taškas taškas F, įrodykite, kad kad $AF = AC$.

Pirmas sprendimas. Spręsime rasdami lygius kampus:



Visų pirma, kadangi trapecija $ADEB$ lygiašonė, tai $\angle ABE = \angle BAD$, taigi ir trikampiai $\triangle ABE = \triangle BAD$, nes $BE = AD$, o AB bendra kraštinė. Iš trikampių lygybės seka, kad kampai $\angle BAE$ ir $\angle ABD$ lygūs, pažymėkime jų dydį $\alpha = \angle BAE = \angle ABD$. Kampas $BAF = \alpha$ remiasi į apibrėžto apskritimo lanką BF, į kurį taip pat remiasi ir kampas $\angle BCF$, reiškia ir $\angle BCF = \alpha$.

Toliau nagrinėkime kampą $\angle BCD = \beta$. Kadangi D guli ant BC vidurio statmens, tai $BD = DC$, taigi trikampis $\triangle BCD$ lygiašonis, tad $\beta = \angle BCD = \angle DBC$.

Pastebėkime, kad kampai $\angle ABC$ ir $\angle AFC$ yra lygūs, kadangi abudu remiasi į lanką AC. Be to, $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \alpha + \beta$, o iš to seka, kad ir $\angle AFC = \alpha + \beta$. Taip pat matome, kad $\angle ACF = \angle ACB + \angle BCF = \beta + \alpha$. Tad, darome išvadą, jog $\angle ACF = \alpha + \beta = \angle AFC$, o dėl to trikampis $\triangle FAC$ lygiašonis, su lygiom kraštinėm $AF = AC$, ką ir reikėjo įrodyti.

Antras sprendimas. Panašiai kaip pirmame sprendime, turime $\angle BCD = \angle DBC$. Be to, $\angle BCD = \angle BFA$, nes abu remiasi į lanką AB. $ADEB$ yra lygiašonė trapecija, todėl $\angle AEB = \angle ADB$. Vadinasi $\angle BDC = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - \angle AEB = \angle BEF$. Taigi, trikampiai BEF ir BDC panašūs pagal du lygius kampus. Kadangi trikampis BDC lygiašonis, dėl trikampių panašumo trikampis BEF taip pat lygiašonis ir $BE = EF$. Be to, lygiašonė trapecija turi $AD = BE$ bei $AE = BD$. Dabar $AF = AE + EF = BD + BE = AD + DC = AC$, ką ir reikėjo įrodyti.