



IX – X klasių (J) grupė

1. Žvaigždžių gausumas (20t)

Apšviestuose miestų centruose nakties danguje plika akimi galima pamatyti apie 50 žvaigždžių. Geros stebėjimo sąlygos užmiestyje lemia, kad ribinis ryškis, kurį dar galima pamatyti, padidėja maždaug nuo 3 iki 6.

- a) Tariant, kad žvaigždės yra vienodo šviesio kaip Saulė ir erdvėje visomis kryptimis yra pasiskirsčiusios tolygiai, apskaičiuokite kiek žvaigždžių galima matyti užmiestyje plika akimi.
- b) Naudojant nemažo skersmens optinį teleskopą, galima surinkti apie 4000 kartų daugiau šviesos nei plika akimi. Kiek žvaigždžių bus galima stebėti pro šį teleskopą? Tarkite, kad Saulės šviesio žvaigždės yra tolygiai pasiskirsčiusios 300 parsekų storio Galaktikos diske (Saulė yra šio disko centrinėje plokštumoje).

Sprendimas

a) Išsireiškiame koku atstumu r_0 yra blausiausios mieste matomos žvaigždės pagal atstumo modulį:

$$m_0 - M = 5 \lg r_0 - 5, \quad \rightarrow r_0 = 10^{\frac{m_0 - M + 5}{5}},$$

$$r_0 = 10^{\frac{3 - 4,83 + 5}{5}} = 4,3 \text{ (pc)}.$$

Čia $m_0 = 3$ – ryškio riba mieste, $M = 4,83$ – absoliutusias Saulės ryškis. Miesto danguje stebimos žvaigždės yra tolygiai pasiskirsčiusios r_0 spindulio pussferėje (likusi sferos dalis yra po horizontu). Žvaigždžių kiekis mieste N_0 gali būti išreikštas per žvaigždžių kiekį kubiniame parseke ρ :

$$N_0 = \frac{2}{3} \pi \rho r_0^3 = \frac{2}{3} \pi \rho \cdot 10^{\frac{3}{5}(m_0 - M + 5)}.$$

Atitinkamą išraišką galima gauti užmiesčio dangui su nauju ribiniu ryškiu $m_1 = 6$:

$$N_1 = \frac{2}{3} \pi \rho r_1^3 = \frac{2}{3} \pi \rho \cdot 10^{\frac{3}{5}(m_1 - M + 5)}.$$

Iš žvaigždžių kiekio santykio gauname žvaigždžių kiekį:

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{\frac{2}{3} \pi \rho \cdot 10^{\frac{3}{5}(m_1 - M + 5)}}{\frac{2}{3} \pi \rho \cdot 10^{\frac{3}{5}(m_0 - M + 5)}} = 10^{\frac{3}{5}(m_1 - m_0)}, \quad \rightarrow N_1 = N_0 \cdot 10^{\frac{3}{5}(m_1 - m_0)},$$

$$N_1 = 50 \cdot 10^{\frac{3}{5}(6 - 3)} = 3200 \text{ (žvaigždžių)}.$$

b) Apskaičiuojamas naujas teleskopu stebimas ribinis ryškis:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \lg k, \quad \rightarrow m_2 = m_1 + 2,5 \lg k,$$

$$m_2 = 6 + 2,5 \lg 4000 = 15.$$

Tuomet blausiausios žvaigždės atstumas:

$$r_2 = 10^{\frac{m_2 - M + 5}{5}}, \quad \rightarrow r_2 = 10^{\frac{15 - 4,83 + 5}{5}} = 1080 \text{ (pc)}.$$

Galima įsitikinti, kad daugiau žvaigždžių bus matoma Galaktikos diske, negu kryptyse nutolusiose nuo disko, nes atstumas r_2 yra didesnis už galaktikos storį. Taigi, galima laikyti, kad stebimos žvaigždės yra



pasiskirsčiusios diske, kurio spindulys r_2 , o storis $d = 300$ pc. Tuomet žvaigždžių kiekis stebimoje disko pusėje yra

$$N_2 = \frac{1}{2} \pi \rho r_2^2 d.$$

Padaliję iš N_0 , gausime:

$$\frac{N_2}{N_0} = \frac{\frac{1}{2} \pi \rho r_2^2 d}{\frac{2}{3} \pi \rho r_0^3}, \quad \rightarrow N_2 = \frac{3}{4} N_0 \frac{r_2^2 h}{r_0^3}.$$

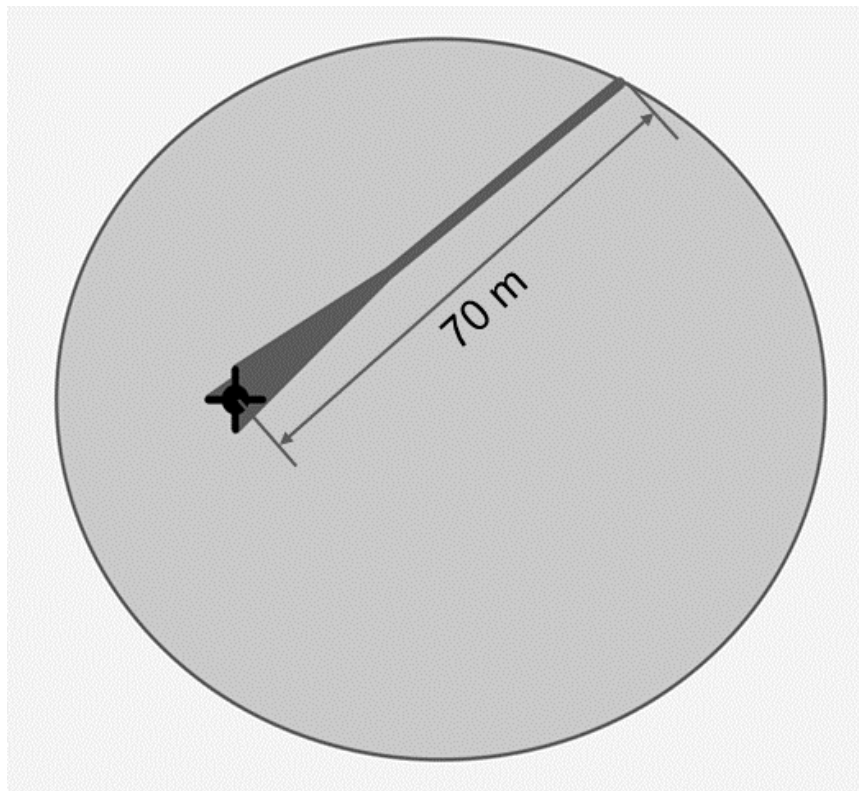
Įrašius atstumų r_1 ir r_2 vertes, galiausiai gauname:

$$N_2 = 3 \cdot 50 \cdot \frac{1080^2 \cdot 300}{4,3^3} = 1,65 \cdot 10^8 \text{ (žvaigždžių).}$$

Atsakymas: Plika akimi užmiestyje galima pamatyti apie 3200 žvaigždžių, o pro teleskopą, kuris surenka 4000 kartų daugiau šviesos nei plika akimi, galima pamatyti apie 165 milijonus žvaigždžių.

2. Atšiauri vietovė (10t)

Vienoje Žemės vietovėje pastatytas stulpas, kurio aukštis $H = 10$ m. Vienos vasario mėn. giedros paros laikotarpyje nuo Saulės metamas stulpo šešėlio galas nubrėžė žemiau pavaizduotą trajektoriją (2.1 pav.). Nustatykite vietovės, kurioje yra šis stulpas, geografinę platumą. Pavaizduotu metu stulpo metamo šešėlio ilgis lygus 70 m.



2.1 pav. Stulpo metamo šešėlio trajektorija



Sprendimas

Stulpo šešėlis, pasisukantis 360° , matomas tik ten, kur Saulė nenusileidžia. Įvertiname mastelį 2.1 pav. ir išmatuojame trumpiausio ir ilgiausio šešėlių ilgius. Gauname, kad trumpiausio šešėlio ilgis $l_{\min} = 25$ m, o ilgiausio – $l_{\max} = 82$ m. Tai atitinka viršutinę ir apatinę Saulės kulminacijas toje vietovėje. Apskaičiuojame Saulės aukščius:

$$\operatorname{tg} h = \frac{H}{l}.$$

Saulės aukštis viršutinėje kulminacijoje

$$h_v = \operatorname{arctg} \frac{10}{25} = 22^\circ.$$

Saulės aukštis apatinėje kulminacijoje

$$h_a = \operatorname{arctg} \frac{10}{82} = 7^\circ.$$

Šie aukščiai gali būti išreikšti per vietovės platumą φ ir šviesulio deklinaciją δ :

$$h_v = 90^\circ - \varphi + \delta,$$

$$h_a = \varphi - 90^\circ + \delta.$$

Šių aukščių skirtumas lygus

$$h_v - h_a = 180^\circ - 2\varphi.$$

Iš čia

$$\varphi = 90^\circ - \frac{h_v - h_a}{2},$$

$$\varphi = 90^\circ - \frac{22^\circ - 7^\circ}{2} = 82,5^\circ.$$

Vasario mėnesį Saulės deklinacija yra neigiama, todėl šiauriniame pusrutulyje tokia šešėlio trajektorija susidaryti negali – tuo metu virš poliarinio rato vyrauja naktis. Taigi, toks šešėlio judėjimas vyksta piečiau pietų poliaračio.

Atsakymas: $82,5^\circ$ pietų platumos.

3. Egzoplaneta ir egzomėnulis (25t)

a) Stebint tolimą raudonąją nykštukę, kurios spindulys siekia pusę Saulės spindulio, nustatyta, kad jos spindesys kas 100 dienų sumažėja 1%.

Raskite aplink šią žvaigždę skriejančios egzoplanetos spindulį. Palyginkite jį su Jupiterio spinduliu ($R_J = 71492$ km).

b) Toliau vykdant egzoplanetos stebėjimus nustatyta, kad kartkartėmis egzoplanetos tranzito trukmė pailgėja, o žvaigždės spindesys tranzito metu susilpnėja 1,13%. Tariant, kad šiuos pakitimus sukelia aplink egzoplanetą skriejantis egzomėnulis, įvertinkite jo spindulį. Palyginkite jį su Žemės spinduliu.

c) Didžiausias žvaigždės spindesio susilpnėjimas stebimas tiksliai kas trečio tranzito metu. Tarkite, kad egzoplanetos tankis lygus Jupiterio tankiui ($\rho_J = 1330$ kg/m³), o jos egzomėnulio tankis – Žemės tankiui ($\rho_\oplus = 5510$ kg/m³). Egzoplanetos traukos jėga viršija žvaigždės traukos jėgą 0,012 au atstumu nuo jos. Raskite didžiausią galimą egzomėnulio orbitos periodą.



Sprendimas

a) Žvaigždės spindesio sumažėjimo procentas lygus procentinei daliai žvaigždės paviršiaus, kurį dengia egzoplaneta.

Tariant, kad abu kūnai sferiški, gauname:

$$\frac{R_p^2}{R_*^2} = 0,01$$

Panaudodami duotą žvaigždės spindulį apskaičiuojame:

$$R_p = 0,1R_* = 0,05R_\odot = 34,785 \cdot 10^6 \text{ m} = 34785 \text{ km} \cong 0,49R_J.$$

b) Kai žvaigždės spindesio susilpnėjimas maksimalus, žvaigždę dengia tiek egzoplanetos, tiek jos egzomėnulio šešėliai.

Vadinasi,

$$\frac{R_p^2 + R_m^2}{R_*^2} = 0,0113,$$

$$\frac{R_m^2}{R_*^2} = 0,0113 - \frac{R_p^2}{R_*^2} = 0,0013.$$

Taigi,

$$R_m = R_* \sqrt{0,0013} = 0,018R_\odot = 12,523 \cdot 10^6 \text{ m} = 12523 \text{ km} \cong 1,96R_\oplus.$$

c) Didžiausias galimas egzomėnulio periodas būtų šiam skriejant didžiausiu galimu atstumu nuo egzoplanetos, tai yra $d = 0,012$ au.

Kadangi egzoplanetos ir egzomėnulio tankiai duoti sąlygoje, galime apskaičiuoti jų mases:

Egzoplanetos masė

$$M = \frac{4}{3}\pi R_p^3 \rho_J = \frac{4}{3}\pi (34,785 \cdot 10^6)^3 \cdot 1330 = 2,345 \cdot 10^{26} \text{ kg}.$$

Egzomėnulio masė

$$m = \frac{4}{3}\pi R_m^3 \rho_\oplus = \frac{4}{3}\pi (12,523 \cdot 10^6)^3 \cdot 5510 = 4,533 \cdot 10^{25} \text{ kg}.$$

Didžiausią egzomėnulio žvaigždinį periodą apskaičiuojame panaudodami trečiąjį apibendrintąjį Keplerio dėsnį:

$$T_{\max} = \sqrt{\frac{4\pi^2 d^3}{G(M+m)}}$$

$$T_{\max} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (0,012 \cdot 149,6 \cdot 10^9)^3}{6,674 \cdot 10^{-11} (2,345 \cdot 10^{26} + 4,533 \cdot 10^{25})}} \cong 3,495 \cdot 10^6 \text{ s} \cong 40,5 \text{ d}$$

Didžiausias žvaigždės spindesio minimumas kartosis lygiai kas tris tranzitus, jei egzoplanetos ir jos palydovo sistemos sinodinis periodas (S) bus tiksliai lygus trims egzoplanetos apsisukimo aplink savo žvaigždę periodams T_p , t. y., $S = 3T_p$.

Panaudodami šį sąryšį ir sinodinio judėjimo lygtį apskaičiuojame egzomėnulio orbitinį periodą:

$$\frac{1}{T_{m0}} = \frac{1}{S} + \frac{1}{T_p} = \frac{1}{3T_p} + \frac{1}{T_p} = \frac{4}{3T_p},$$

$$T_{m0} = \frac{3}{4}T_p = \frac{300}{4} = 75 \text{ d}.$$

Tačiau toks egzomėnulio periodas nėra galimas, nes $T_{m0} > T_{\max}$.

Tačiau egzomėnulis gali turėti ir kitas periodo vertes, jei tik bus tenkinama sąlyga, kad

$$3T_p/S = n,$$

čia n – sveikasis skaičius.



Tada panaudodami sinodinę lygtį ir maksimalią egzoplanetos orbitinio periodo vertę apskaičiuojame daugiklį n :

$$\frac{1}{3T_p/n} = \frac{1}{T_{\max}} - \frac{1}{T_p}$$
$$n = 3 \left(\frac{T_p}{T_{\max}} - 1 \right) = 3 \left(\frac{100}{40,5} - 1 \right) \cong 4,4$$

Primename, kad n turi būti sveikas skaičius. Jei $n = 4$, tai egzomėnulis būtų ilgesnis už T_{\max} . Vadinasi, turi būti $n = 5$. Tada egzomėnulis sinodinis periodas bus lygus

$$S = \frac{3T_p}{n} = \frac{300}{5} = 60 \text{ d.}$$

Egzomėnulis orbitinis (žvaigždinis) periodas bus lygus

$$\frac{1}{T_m} = \frac{1}{S} + \frac{1}{T_p}$$
$$\frac{1}{T_m} = \frac{1}{60} + \frac{1}{100} = 0,02667$$
$$T_m = 37,5 \text{ d}$$

4. Fotografuojant žvaigždžių spiečių (20t)

Ruošiantis fotografuoti žvaigždžių spiečių, prie 250 mm teleskopo prijungta CCD kamera, kurios matricą sudaro 1024×1024 pikselių; vieno pikselio matmenys $12\mu\text{m} \times 12\mu\text{m}$. Teleskopo santykinė anga (šviesingumas) $1/10$. Fotografuojamo žvaigždžių spiečiaus paralaksas $0,58$ mas (kampinių milisekundžių), o regimasis kampinis skersmuo $12'$.

Užduotys:

a) Apskaičiuokite spiečiaus atstumą ir linijinį skersmenį.

b) Apskaičiuokite spiečiaus vaizdo matmenis teleskopo židinio plokštumoje.

c) Apskaičiuokite, kiek pikselių užims spiečiaus vaizdas teleskopo židinio plokštumoje.

d) Apskaičiuokite, kiek su šiuo teleskopu ir CCD matrica bus užregistruota fotonų per 1s nuo spiečiuje esančios Saulės tipo žvaigždės UBV sistemos V ryškio juostoje. Žinoma, kad šioje juostoje žvaigždės, kurios regimasis ryškis $V = 0$, spinduliuotės fotonų srautas lygus $866000 \text{ fotonų} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. Į spinduliuotės nuostolius teleskopo optinėje sistemoje neatsižvelgiama.

Sprendimas

a) Spiečiaus atstumas

$$r = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,00058} = 1724 \text{ pc}$$

Spiečiaus fizinis skersmuo

$$s = r\theta = 1724 \cdot \frac{12 \cdot 60}{206265} = 6 \text{ pc}$$

b) Spiečiaus vaizdo skersmuo teleskopo židinio plokštumoje.

Teleskopo židinio nuotolis

$$f_t = 10D = 10 \cdot 250 = 2500 \text{ mm}$$

$$l = \theta f_t = \frac{12 \cdot 60}{206265} 2500 = 8,7 \text{ mm}$$



c) Spiečiaus vaizdo dydis skaičiuojant pikseliais

Spiečiaus skersmuo skaičiuojant pikseliais

$$n = \frac{l}{l_{1px}} = \frac{8,7}{0,012} = 725$$

Taigi, spiečiaus vaizdas užims 725×725 pikselių.

d) Kiek fotonų bus surinkta iš Saulės tipo žvaigždės per 1s teleskopo židinyje?

Saulės tipo žvaigždės ryškis spiečiaus nuotolyje

$$V_{\odot} = M_{V_{\odot}} + 5 \lg r - 5 = 4,83 + 5 \lg 1724 - 5 \cong 16,0$$

Fotonų skaičius, ateinantis iš Saulės tipo žvaigždės, esančios spiečiaus nuotolyje, per 1 s į 1 cm².

$$V_{\odot} - V_0 = -2,5 \lg \frac{N_{\odot}}{N_0}$$

$$\lg \frac{N_{\odot}}{N_0} = \frac{16,0 - 0,0}{-2,5} = -6,4$$

$$N_{\odot} = N_0 10^{-6,4} = 866000 \cdot 10^{-6,4} = 0,345 \text{ fotonų} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

Šios žvaigždės fotonų skaičius, surinktas teleskopo židinyje per 1 s:

$$N_{\odot t} = N_{\odot} S;$$

Čia S – teleskopo pagrindinio veidrodžio (objektyvo) plotas.

$$N_{\odot t} = N_{\odot} \frac{\pi D^2}{4} = 0,345 \frac{\pi \cdot 12,5^2}{4} \cong 42 \text{ fotonai} \cdot \text{s}^{-1}$$

5. Galaktikų tyrimas (25t)

Astronomai nufotografavo dvi diskines galaktikas, A ir B, kurios viena nuo kitos danguje yra matomos 10 laipsnių kampiniu atstumu. Šių galaktikų spektruose buvo išmatuoti jonizuotojo kalcio K linijos (laboratorinis bangos ilgis 393,4 nm) bangų ilgiai. Stebėjimų duomenys pateikti lentelėje.

Galaktika	Matmenys, arcmin	Regimasis suminis ryškis	K linijos bangos ilgis spektre, nm
A	2,5×2,0	9,6	398,2
B	1,7×1,3	10,3	400,8

Abiejų galaktikų diskai yra skritulio formos ir iš Žemės matomi pasisukę disko plokštuma tam tikru kampu į regėjimo spindulį pagal vieną simetrijos ašį.

Tardami, kad spektrinių linijų galaktikų spektruose poslinkio priežastis yra Visatos plėtimasis, o Hablo konstanta H_0 apytiksliai lygi 70 km/s/Mpc, nustatykite:

- Kokiais greičiais nuo mūsų tolsta šios galaktikos?
- Kokiame nuotolyje nuo Žemės yra kiekviena galaktika?
- Kuri ir kiek šviesmečių iš šių galaktikų yra didesnė?
- Kokiu kampu yra pasisukę į regėjimo spindulį galaktikų diskai?
- Raskite šių galaktikų absoliučiuosius ryškius ir galaktikų šviesių skirtumą, išreikštą Saulės šviesiais.
- Kokiu atstumu šviesmečiais viena nuo kitos yra išsidėsčiusios šios galaktikos?



Sprendimas

a) Tolimo nuo Žemės greitį rasime iš jonizuotojo kalcio linijos galaktikos spektre raudonojo poslinkio:

$$v = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} c,$$

čia λ – stebimas bangos ilgis, λ_0 – laboratorinis bangos ilgis, c – šviesos greitis vaakuame.

$$v_A = \frac{398,2 - 393,4}{393,4} c \approx 0,0122c \approx 3658 \text{ km/s}$$

$$v_B = \frac{400,8 - 393,4}{393,4} c \approx 0,0188c \approx 5639 \text{ km/s}$$

b) Nuotolius d apskaičiuosime pritaikydami Hablo dėsnį: $v = H_0 d$.

$$d = \frac{v}{H_0}$$

$$d_A = \frac{3658 \text{ km/s}}{70 \text{ km/s/Mpc}} \approx 52,26 \text{ Mpc} \approx 170,44 \text{ Mly}$$

$$d_B = \frac{5639 \text{ km/s}}{70 \text{ km/s/Mpc}} \approx 80,56 \text{ Mpc} \approx 262,74 \text{ Mly}$$

c) Galaktikos linijinį skersmenį D apskaičiuosime remdamiesi tuo, kad $\text{tg}(D^\circ) = \frac{D}{d}$,

čia D° – galaktikos kampinis skersmuo, d – nuotolis iki galaktikos

$$D = d \cdot \text{tg}(D^\circ)$$

$$D_A = 170,44 \cdot 10^6 \cdot \text{tg}(2,5/60) \approx 124 \text{ kly}$$

$$D_B = 262,74 \cdot 10^6 \cdot \text{tg}(1,7/60) \approx 130 \text{ kly}$$

Ats.: Galaktikos B skersmuo yra apie 6000 ly didesnis už galaktikos A skersmenį.

d) Apskaičiuojame disko posvyrio kampą: $\alpha = \arccos\left(\frac{b}{a}\right)$,

čia a – ilgesnysis kampinis skersmuo, b – trumpesnysis kampinis skersmuo.

$$\alpha_A = \arccos\left(\frac{2}{2,5}\right) \approx 37^\circ$$

$$\alpha_B = \arccos\left(\frac{1,3}{1,7}\right) \approx 40^\circ$$

e) Apskaičiuojame galaktikų absoliučiuosius ryškius M :

$$M = m - 5\lg(d/10),$$

čia d – nuotolis parsekais, m – regimasis ryškis.

$$M_A = 9,6 - 5\lg\left(\frac{52,26 \cdot 10^6}{10}\right) \approx -23,99$$

$$M_B = 10,3 - 5\lg\left(\frac{80,56 \cdot 10^6}{10}\right) \approx -24,23$$

Apskaičiuojame galaktikų šviesius, išreikštus Saulės šviesiais L_\odot :

$$\frac{L}{L_\odot} = 10^{0,4(M_\odot - M)},$$

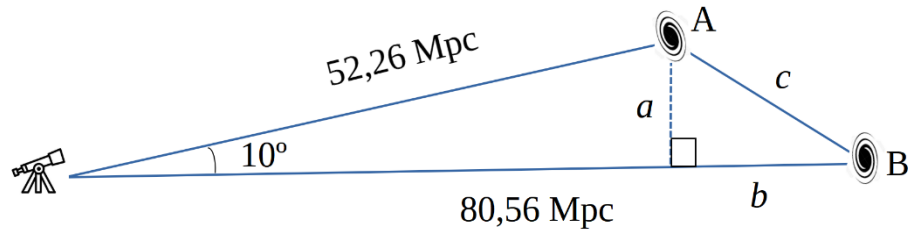
čia M_\odot Saulės absoliutusias vizualinis ryškis ($M_\odot = 4,83$).

$$L_A = 10^{0,4(4,83 + 23,99)} = 3,37 \cdot 10^{11} L_\odot$$



$$L_B = 10^{0,4(4,83+24,23)} = 4,21 \cdot 10^{11} L_{\odot}$$

f) Apskaičiuojame galaktikų tarpusavio nuotolį.



$$b = 80,56 - 52,26 \cos 10^\circ = 29,094 \text{ Mpc},$$

$$a = 52,26 \sin 10^\circ = 9,075 \text{ Mpc}.$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9,075^2 + 29,094^2} \approx 30,476 \text{ Mpc} \approx 99,4 \text{ Mly}.$$

Ats.: Erdvinis nuotolis tarp galaktikų apie 99,6 Mly.