Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Savivaldybių etapo užduočių 11 – 12 klasei sprendimai
2022 m.

1 uždavinys. Šiandien Sonata ir Donata abi švenčia savo gimtadienius. Sonata Donatai pasakė tokį teisingą teiginį apie savo amžių: „Dabar man yra pusantro karto daugiau metų, nei tau buvo tuo metu, kai aš buvau tavo dabartinio amžiaus. O kai tu sulauksi mano amžiaus, mūsų amžių suma bus lygi dabartiniam mūsų kaimyno Renato amžiui.“ Kiekvienas amžius teiginyje yra sveikasis metų skaičius. Renatui šiuo metu 91 metai. Kiek metų šiandien sukako Sonatai?

Pirmas sprendimas. Dabartinį Sonatos ir Donatos amžių metais atitinkamai pažymėkime s ir d. Remiantis Sonatos teiginiu, galima taip užrašyti, kiek metų yra, buvo ir bus seserims tuo pačiu metu:

1) (yra) Sonatai s, Donatai d;
2) (buvo) Sonatai d, Donatai $s : 1{,}5 = \frac{2s}{3}$;
3) (bus) Sonatai $91 - s$, Donatai s.

Seserų amžių skirtumas bėgant metams nekinta:

$$s - d = d - \frac{2s}{3} = (91 - s) - s.$$

Liko išspręsti gautą lygčių sistemą:

$$2d = d + d = s + \frac{2s}{3} = \frac{5s}{3}, \qquad d = \frac{5s}{6},$$

$$91 - 2s = (91 - s) - s = d - \frac{2s}{3} = \frac{5s}{6} - \frac{2s}{3} = \frac{s}{6},$$

$$91 = 2s + \frac{s}{6} = \frac{13s}{6}, \qquad s = 6 \cdot 91 : 13 = 6 \cdot 7 = 42$$

(ir $d = \frac{5s}{6} = 35$).

Antras sprendimas. Dabartinį Donatos ir Sonatos amžių metais atitinkamai pažymėkime d ir $s = d + x$. Prieš x metų joms buvo atitinkamai $d - x$ ir d metų. Anot Sonatos teiginio, $1{,}5(d - x) = d + x$. Taigi $3d - 3x = 2d + 2x$ ir $d = 5x$. Po x metų Donatai ir Sonatai bus atitinkamai $d + x = 6x$ ir $s + x = d + 2x = 7x$ metų. Anot Sonatos teiginio, $6x + 7x = 91$ ir todėl $x = 7$, $d = 35$, $s = 42$.

Ats.: 42.

2 uždavinys. Keturių svarelių – raudono, balto, mėlyno ir žalio – masės gramais atitinkamai lygios r, b, m ir z. Yra žinoma, kad šiuos keturis skaičius surašius didėjimo tvarka gaunama seka 1, 2, 3, 4 ir kad skaičius r lygus 2 arba 3. Nustatykite, ar turint tik šiuos svarelius ir lėkštines svarstykles įmanoma trimis svėrimais garantuotai sužinoti visų keturių skaičių r, b, m, z reikšmes.

Pastaba. Kiekvienas svėrimas lėkštinėmis svarstyklėmis parodo, kurioje iš dviejų lėkščių padėta masė yra didesnė arba kad masės abiejose lėkštėse yra lygios.

Sprendimas. Pirmuoju svėrimu pasverkime raudoną ir baltą svarelius vienoje lėkštėje bei mėlyną ir žalią svarelius kitoje. Yra trys galimybės: 1) jei $b = 2$ arba 3, tai atitinkamai $r = 3$ arba 2, ir svarstyklės parodys, kad $r + b = m + z$ (nes $2 + 3 = 1 + 4$); 2) jei $b = 4$, tai abiem atvejais $r = 2$ ir $r = 3$ svarstyklės parodys, kad $r + b > m + z$ (nes $2 + 4 > 1 + 3$ ir $3 + 4 > 1 + 2$); 3) jei $b = 1$, tai abiem atvejais $r = 2$ ir $r = 3$ svarstyklės parodys, kad $r + b < m + z$ (nes $1 + 2 < 3 + 4$ ir $1 + 3 < 2 + 4$).

Priklausomai nuo pirmojo svėrimo rezultato atitinkamai atlikime tokius veiksmus.

1) Jei $r+b = m+z$, tai $b = 2$ arba 3. Antruoju svėrimu palyginkime raudoną ir baltą svarelius: taip sužinosime, kuris iš skaičių r ir b lygus 2, o kuris 3. Trečiuoju svėrimu palyginkime mėlyną ir žalią svarelius: taip sužinosime, kuris iš skaičių m ir z lygus 1, o kuris 4.

2) Jei $r+b > m+z$, tai $b = 4$. Tada vienas iš skaičių m ir z lygus 1. Antruoju svėrimu palyginę mėlyną ir žalią svarelius, sužinosime kuris. Trečiuoju svėrimu beliks palyginti du svarelius, kurių masės dar nežinomos: taip sužinosime, kuri iš jų lygi 2 g, o kuri 3 g.

3) Jei $r+b < m+z$, tai $b = 1$. Tada vienas iš skaičių m ir z lygus 4. Antruoju svėrimu palyginę mėlyną ir žalią svarelius, sužinosime kuris. Trečiuoju svėrimu beliks palyginti du svarelius, kurių masės dar nežinomos: taip sužinosime, kuri iš jų lygi 2 g, o kuri 3 g.

Taigi visais atvejais po trijų svėrimų žinosime kiekvieno svarelio masę.

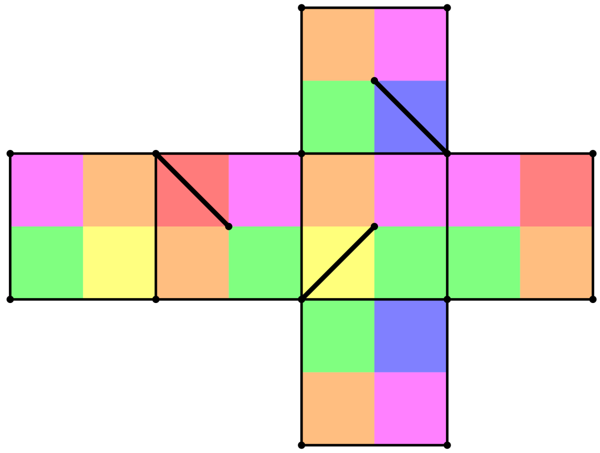
Ats.: taip, įmanoma.

3 uždavinys. Kiekviena $30 \times 30 \times 30$ kubo siena padalyta į 30×30 vienetinių langelių. Kai kurie kubo langeliai sudaro *eilutes*: kubo eilute vadinsime bet kuriuos 120 langelių, kurių vidurio taškai yra vienoje plokštumoje, lygiagrečioje su dviem priešingomis kubo sienomis. Šachmatų bokštas, priklijuotas kubo langelyje, *puola* kiekvieną langelį, esantį vienoje eilutėje su bokšto langeliu. Kiek daugiausiai bokštų galima priklijuoti skirtinguose kubo langeliuose, kad joks bokštas nepultų langelio, kuriame yra kitas bokštas?

Sprendimas. Tarkime, kad kubo langeliuose yra n bokštų ir jokie du bokštai nėra vienoje kubo eilutėje.

Kiekvienas langelis priklauso lygiai dviem kubo eilutėms, todėl kubas turi mažiausiai $2n$ eilučių. Kubo eilučių, kurių langelių vidurio taškų plokštumos yra lygiagrečios su dviem duotomis priešingomis kubo sienomis, yra 30. Priešingų kubo sienų porų yra 3, taigi iš viso kubo eilučių yra $30 \cdot 3 = 90$. Vadinasi, $2n \leqslant 90$ ir $n \leqslant 45$.

Reikšmę $n = 45$ gausime, jei trijose kubo sienose, turinčiose bendrą viršūnę, priklijuosime po 15 bokštų. Tai galima atlikti reikiamu būdu, kiekvienoje iš trijų sienų pasirenkant, pavyzdžiui, tuos langelius, kurių vidurio taškai yra atkarpose, jungiančiose sienų viršūnes su sienų vidurio taškais ir pavaizduotose šioje kubo išklotinėje:



Ats.: 45.

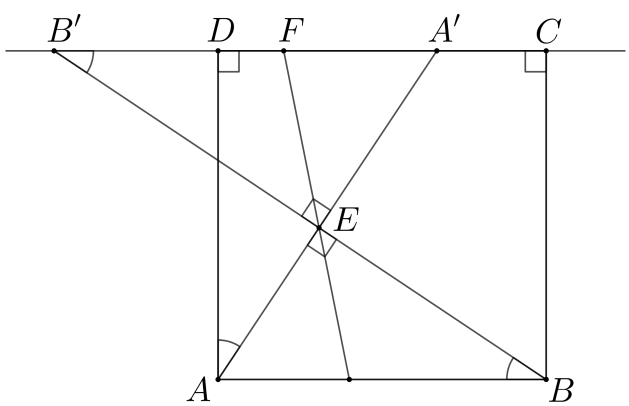
4 uždavinys. Kvadrato $ABCD$ viduje pažymėtas toks taškas E, kad $\angle AEB = 90°$ ir $3AE = 2BE$. Kvadrato kraštinėje CD pažymėtas toks taškas F, kad tiesė EF dalija kampą AEB pusiau. Raskite $CF : DF$.

Pirmas sprendimas. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgį pažymėkime a. Tiesės CD sankirtos su tiesėmis AE ir BE taškus atitinkamai pažymėkime A' ir B'. Kadangi

$$\angle A'AD = 90° - \angle A'AB = 90° - \angle EAB = \angle ABE, \qquad \angle ADA' = 90° = \angle BEA,$$

tai $\triangle A'AD \sim \triangle ABE$ ir todėl $A'D : AD = AE : BE = 2 : 3$, $A'D = \frac{2a}{3}$. Analogiškai gauname, kad $B'C = \frac{3a}{2}$ (o kadangi $B'C > a$, tai taškas D yra tarp taškų B' ir C; žr. pav.). Vadinasi,

$$A'B' = A'D + DB' = \frac{2a}{3} + (B'C - CD) = \frac{2a}{3} + \left(\frac{3a}{2} - a\right) = \frac{7a}{6}.$$



Tiesėje EF yra kampo AEB, o todėl ir kampo $A'EB'$ pusiaukampinė (kryžminiai kampai). Kadangi $\angle A'B'E = \angle ABE$, $\angle B'A'E = \angle BAE$ (priešiniai kampai), tai $\triangle A'B'E \sim \triangle ABE$ ir $A'E : B'E = AE : BE = 2 : 3$. Atkarpa EF yra trikampio $A'B'E$ pusiaukampinė, todėl $A'F : B'F = A'E : B'E = 2 : 3$ (pusiaukampinės savybė),

$$A'F = \frac{2}{5}A'B' = \frac{7a}{15}, \qquad CF = CA' + A'F = (CD - DA') + \frac{7a}{15} = \left(a - \frac{2a}{3}\right) + \frac{7a}{15} = \frac{4a}{5},$$

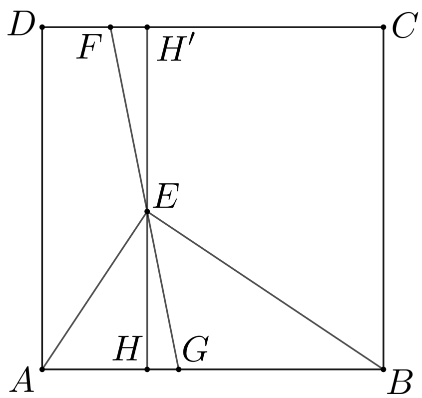
$$DF = CD - CF = \frac{a}{5}, \qquad CF : DF = 4.$$

Antras sprendimas. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgį pažymėkime a. Trikampyje AEB į kraštinę AB nuleiskime pusiaukampinę EG (taškai F, E, G yra vienoje tiesėje) ir aukštinę EH. Iš taško E į tiesę CD nuleiskime statmenį EH' (taškai H', E, H yra vienoje tiesėje).

Statūs trikampiai AEH ir EBH panašūs su trikampiu ABE (turi su juo po bendrą smailųjį kampą). Todėl $AH : EH = EH : BH = AE : BE = 2 : 3$ ir

$$a = AB = AH + HB = \frac{2}{3}EH + \frac{3}{2}EH = \frac{13}{6}EH, \qquad EH = \frac{6a}{13},$$

$$AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{6a}{13} = \frac{4a}{13}, \qquad BH = \frac{3}{2} \cdot \frac{6a}{13} = \frac{9a}{13}, \qquad EH' = a - EH = \frac{7a}{13}.$$



Kita vertus, $AG : GB = AE : EB = 2 : 3$ (pusiaukampinės savybė). Taigi $BG = \frac{3a}{5}$ (turime $BG < BH$, todėl taškas G yra atkarpoje BH; žr. pav.) ir $GH = \frac{9a}{13} - \frac{3a}{5} = \frac{6a}{65}$. Pagal kryžminius kampus HEG ir $H'EF$ statūs trikampiai HEG ir $H'EF$ panašūs, todėl

$$H'F : HG = H'E : HE = 7 : 6, \qquad H'F = \frac{7}{6}HG = \frac{7a}{65},$$

$$CF = CH' + H'F = BH + \frac{7a}{65} = \frac{9a}{13} + \frac{7a}{65} = \frac{4a}{5},$$

$$CF : DF = CF : (CD - CF) = \frac{4a}{5} : \frac{a}{5} = 4.$$

Ats.: 4.

5 uždavinys. Natūralųjį skaičių n vadinsime *kvadrakubu*, jei egzistuoja lygiai viena tokia natūraliųjų skaičių pora (a, b), kad $n = a^2 \cdot b^3$. Natūralųjį skaičių n vadinsime *superkvadrakubu*, jei jis yra kvadrakubas ir lygiai pusė jo teigiamų daliklių yra kvadrakubai. Kiek teigiamų daliklių gali turėti superkvadrakubas? Raskite visus variantus.

Sprendimas. Skaičius 1 nėra superkvadrakubas. Tarkime, kad duotas kvadrakubas $n > 1$, kurio skaidinys pirminiais daugikliais yra $p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ (čia visi a_i teigiami). Spręsdami lygtį $n = a^2 \cdot b^3$ (a ir b atžvilgiu), galime imti $a = p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}$, $b = p_1^{y_1} \dots p_k^{y_k}$. Čia laipsnių rodikliai yra neneigiami sveikieji skaičiai. Vietoj vienos lygties $n = a^2 \cdot b^3$, turinčios lygiai vieną natūralųjį sprendinį (a, b), gauname k lygčių

$$a_1 = 2x_1 + 3y_1, \qquad a_2 = 2x_2 + 3y_2, \qquad \dots, \qquad a_k = 2x_k + 3y_k,$$

kurių kiekviena turi turėti lygiai vieną neneigiamą sveikąjį sprendinį (x_i, y_i).

Nagrinėkime lygtį $a = 2x + 3y$, kur a yra duotas natūralusis skaičius. Ji turi turėti lygiai vieną neneigiamą sveikąjį sprendinį (x, y). Kai, pavyzdžiui, $a = 7$, galime atlikti perranką: reikšmės $y > 2$ per didelės, $y = 0$ ir $y = 2$ netinka, o kai $y = 1$, tai $x = 2$. Taigi lygtis turi lygiai vieną sprendinį, kai $a = 7$. Analogiškai gauname, kad tinka $a = 2$, 3, 4, 5, bet netinka $a = 1$ ir 6. Kai $a \geqslant 8$, tai galima gauti bent po du skirtingus lygties sprendinius: $(\frac{a}{2}, 0)$ ir $(\frac{a-6}{2}, 2)$, jei a lyginis; $(\frac{a-3}{2}, 1)$ ir $(\frac{a-9}{2}, 3)$, jei a nelyginis.

Vadinasi, skaičius n yra kvadrakubas tada ir tik tada, kai skaidinyje $p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ kiekvienas rodiklis a_i priklauso aibei $\{2, 3, 4, 5, 7\}$. Jo teigiami dalikliai yra skaičiai $p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}$, kur kiekvienas b_i yra vienas iš skaičių 0, 1, …, a_i. Jų yra $(a_1 + 1) \dots (a_k + 1)$. Kvadrakubai yra tie iš jų, kur kiekvienas b_i priklauso aibei $\{0, 2, 3, 4, 5, 7\}$, t. y. jei $a_i = 2$, 3, 4, 5, 7, tai b_i galimų reikšmių skaičius c_i atitinkamai lygus 2, 3, 4, 5, 6. Skaičius n turi $c_1 \dots c_k$ daliklių kvadrakubų, o kad būtų superkvadrakubas, turi būti teisinga lygybė

$$\frac{c_1}{a_1 + 1} \cdot \frac{c_2}{a_2 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{c_k}{a_k + 1} = \frac{1}{2},$$

kur kiekviena trupmena $\frac{c_i}{a_i+1}$ lygi $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ arba $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Lygybės $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$ ir $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ (kuriose, be to, $\frac{3}{4}$ galima pakeisti į $\frac{6}{8}$) parodo, kad jei n skaidinys yra $p_1^3 p_2^4 p_3^5$, $p_1^7 p_2^4 p_3^5$, $p_1^2 p_2^3$ arba $p_1^2 p_2^7$, tai n yra superkvadrakubas. Tokie skaičiai atitinkamai turi $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$, $8 \cdot 5 \cdot 6 = 240$, $3 \cdot 4 = 12$, $3 \cdot 8 = 24$ teigiamų daliklių. Liko įrodyti, kad kitų galimybių gauti trupmenų $\frac{c_i}{a_i+1}$ sandaugą $\frac{1}{2}$ nėra.

Tarkime, kad n yra superkvadrakubas. Turime $\frac{c_i}{a_i+1} \in \left[\frac{2}{3}; \frac{5}{6}\right]$, kur $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} < \frac{1}{2}$. Todėl $1 < k < 4$. Trupmenas $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ turime panaudoti arba abi, arba nė vienos iš jų (kitaip skaitiklyje arba vardiklyje nesusiprastins skaičius 5). Pirmuoju atveju gauname lygybę $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots = \frac{1}{2}$, kurioje turime imti $\ldots = \frac{3}{4}$. Antruoju atveju tinka tik trečioji iš lygybių $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots = \frac{1}{2}$, kurią turime imti be …. Įrodyta.

Ats.: 12, 24, 120, 240.