Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Savivaldybių etapo užduočių 9 - 10 klasei sprendimai
2022 m.

1 uždavinys. Šiandien Sonata ir Donata abi švenčia savo gimtadienius. Sonata Donatai pasakė tokį teisingą teiginį apie savo amžių: „Dabar man yra pusantro karto daugiau metų, nei tau buvo tuo metu, kai aš buvau tavo dabartinio amžiaus. O kai tu sulauksi mano amžiaus, mūsų amžių suma bus lygi dabartiniam mūsų kaimyno Renato amžiui.“ Kiekvienas amžius teiginyje yra sveikasis metų skaičius. Renatui šiuo metu 91 metai. Kiek metų šiandien sukako Sonatai?

Pirmas sprendimas. Dabartinį Sonatos ir Donatos amžių metais atitinkamai pažymėkime s ir d. Remiantis Sonatos teiginiu, galima taip užrašyti, kiek metų yra, buvo ir bus seserims tuo pačiu metu:

1) (yra) Sonatai s, Donatai d;
2) (buvo) Sonatai d, Donatai $s : 1{,}5 = \frac{2s}{3}$;
3) (bus) Sonatai $91 - s$, Donatai s.

Seserų amžių skirtumas bėgant metams nekinta:

$$s - d = d - \frac{2s}{3} = (91 - s) - s.$$

Liko išspręsti gautą lygčių sistemą:

$$2d = d + d = s + \frac{2s}{3} = \frac{5s}{3}, \qquad d = \frac{5s}{6},$$

$$91 - 2s = (91 - s) - s = d - \frac{2s}{3} = \frac{5s}{6} - \frac{2s}{3} = \frac{s}{6},$$

$$91 = 2s + \frac{s}{6} = \frac{13s}{6}, \qquad s = 6 \cdot 91 : 13 = 6 \cdot 7 = 42$$

(ir $d = \frac{5s}{6} = 35$).

Antras sprendimas. Dabartinį Donatos ir Sonatos amžių metais atitinkamai pažymėkime d ir $s = d + x$. Prieš x metų joms buvo atitinkamai $d - x$ ir d metų. Anot Sonatos teiginio, $1{,}5(d - x) = d + x$. Taigi $3d - 3x = 2d + 2x$ ir $d = 5x$. Po x metų Donatai ir Sonatai bus atitinkamai $d + x = 6x$ ir $s + x = d + 2x = 7x$ metų. Anot Sonatos teiginio, $6x + 7x = 91$ ir todėl $x = 7$, $d = 35$, $s = 42$.

Ats.: 42.

2 uždavinys. Keturių svarelių – raudono, balto, mėlyno ir žalio – masės gramais atitinkamai lygios r, b, m ir z. Yra žinoma, kad šiuos keturis skaičius surašius didėjimo tvarka gaunama seka 1, 2, 3, 4 ir kad skaičius r lygus 2 arba 3. Nustatykite, ar turint tik šiuos svarelius ir lėkštines svarstykles įmanoma trimis svėrimais garantuotai sužinoti visų keturių skaičių r, b, m, z reikšmes.

Pastaba. Kiekvienas svėrimas lėkštinėmis svarstyklėmis parodo, kurioje iš dviejų lėkščių padėta masė yra didesnė arba kad masės abiejose lėkštėse yra lygios.

Sprendimas. Pirmuoju svėrimu pasverkime raudoną ir baltą svarelius vienoje lėkštėje bei mėlyną ir žalią svarelius kitoje. Yra trys galimybės: 1) jei $b = 2$ arba 3, tai atitinkamai $r = 3$ arba 2, ir svarstyklės parodys, kad $r + b = m + z$ (nes $2 + 3 = 1 + 4$); 2) jei $b = 4$, tai abiem atvejais $r = 2$ ir $r = 3$ svarstyklės parodys, kad $r + b > m + z$ (nes $2 + 4 > 1 + 3$ ir $3 + 4 > 1 + 2$); 3) jei $b = 1$, tai abiem atvejais $r = 2$ ir $r = 3$ svarstyklės parodys, kad $r + b < m + z$ (nes $1 + 2 < 3 + 4$ ir $1 + 3 < 2 + 4$).

Priklausomai nuo pirmojo svėrimo rezultato atitinkamai atlikime tokius veiksmus.

1) Jei $r+b = m+z$, tai $b = 2$ arba 3. Antruoju svėrimu palyginkime raudoną ir baltą svarelius: taip sužinosime, kuris iš skaičių r ir b lygus 2, o kuris 3. Trečiuoju svėrimu palyginkime mėlyną ir žalią svarelius: taip sužinosime, kuris iš skaičių m ir z lygus 1, o kuris 4.

2) Jei $r+b > m+z$, tai $b = 4$. Tada vienas iš skaičių m ir z lygus 1. Antruoju svėrimu palyginę mėlyną ir žalią svarelius, sužinosime kuris. Trečiuoju svėrimu beliks palyginti du svarelius, kurių masės dar nežinomos: taip sužinosime, kuri iš jų lygi 2 g, o kuri 3 g.

3) Jei $r+b < m+z$, tai $b = 1$. Tada vienas iš skaičių m ir z lygus 4. Antruoju svėrimu palyginę mėlyną ir žalią svarelius, sužinosime kuris. Trečiuoju svėrimu beliks palyginti du svarelius, kurių masės dar nežinomos: taip sužinosime, kuri iš jų lygi 2 g, o kuri 3 g.

Taigi visais atvejais po trijų svėrimų žinosime kiekvieno svarelio masę.

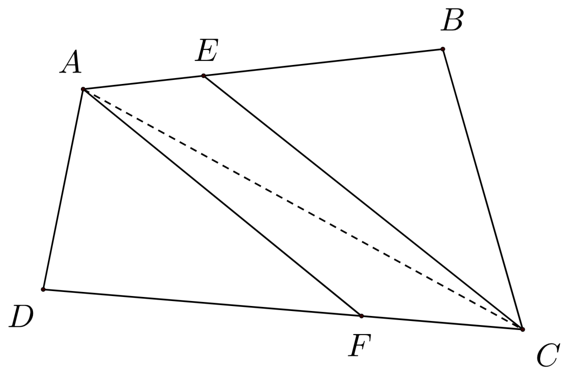
Ats.: taip, įmanoma.

3 uždavinys. Duotas iškilasis keturkampis $ABCD$. Atkarpoje AB pažymėtas toks taškas E, kad $EB = 2 \cdot AE$. Atkarpoje CD pažymėtas toks taškas F, kad $DF = 2 \cdot CF$. Įrodykite, kad keturkampio $ABCD$ plotas yra tris kartus didesnis už keturkampio $AECF$ plotą.

Įrodymas. Atitinkamų keturkampių plotus pažymėkime S_{ABCD} ir S_{AECF}. Nubrėžkime keturkampio $ABCD$ įstrižainę AC (žr. pav.).

Trikampiai CAF ir CAD turi tą pačią aukštinę, nuleistą iš viršūnės A. Be to, pagal uždavinio sąlygą trikampio CAD kraštinė CD yra tris kartus ilgesnė už trikampio CAF kraštinę CF. Todėl trikampio CAD plotas S_{CAD} yra tris kartus didesnis už trikampio CAF plotą S_{CAF}. Panašiai gauname, kad trikampio ACB plotas S_{ACB} yra tris kartus didesnis už trikampio ACE plotą S_{ACE}. Vadinasi,

$$S_{ABCD} = S_{CAD} + S_{ACB} = 3 \cdot S_{CAF} + 3 \cdot S_{ACE} = 3 \cdot \Big(S_{CAF} + S_{ACE}\Big) = 3 \cdot S_{AECF}.$$



4 uždavinys. Keturženklis natūralusis skaičius N nesidalija iš 10. Skaičiaus N skaitmenis surašius atvirkščia tvarka, gaunamas skaičius $5N+6$. Raskite visus tokius skaičius N.

Pirmas sprendimas. Kadangi skaičius $5N+6$ yra keturženklis, tai $N<2000$. Todėl skaičiaus N tūkstančių skaitmuo lygus 1. Taigi galime pažymėti $N=\overline{1ABC}=1000+$ $+100A+10B+C$, kur A, B, C yra skaitmenys. Pagal uždavinio sąlygą galime parašyti

$$\overline{CBA1}=5\cdot\overline{1ABC}+6,$$

$$1000C+100B+10A+1=5\cdot(1000+100A+10B+C)+6.$$

Kadangi $5N+6>5N\geqslant 5000$, tai $C\geqslant 5$. Suprastinę panašius narius ir abi lygybės puses padaliję iš 5, gauname

$$199C+10B=98A+1001.$$

Skaičius $199C-1001=98A-10B$ yra lyginis. Todėl skaitmuo C nelyginis. Kadangi $C\geqslant 5$, tai $C=5,\ 7$ arba 9.

Jei $C=5$, tai $10B=98A+6$. Tada $5B=49A+3$. Skaitmenys $A>0$ yra per dideli ($5\cdot 9=45<49$), o skaitmuo $A=0$ netinka.

Jei $C=7$, tai $10B+392=98A$. Matome, kad skaičius $98A-392$ dalijasi iš 10. Todėl skaičiaus $98A$ paskutinis skaitmuo lygus 2. Taigi $A=4$ arba $A=9$. Jei $A=4$, tai $B=0$. Gauname skaičių $N=1407$, kuris tenkina uždavinio sąlygą. Jei $A=9$, tai $B=49$ – ne skaitmuo.

Jei $C=9$, tai $10B+790=98A$. Tada $98A$ dalijasi iš 5, ir $A=0$ arba $A=5$. Abiem atvejais gauname, kad $B<0$, o taip būti negali.

Antras sprendimas. Lygtį $199C+10B=98A+1001$ ir tai, kad $C=5,\ 7$ arba 9, gauname kaip ir pirmame sprendime. Pastebėkime, kad skaičiai 98 ir 1001 dalijasi iš 7, $199=7\cdot 28+3$ ir $10=7+3$. Tada skaičius

$$98A+1001=199C+10B=3C+3B+7\cdot(28C+B)$$

dalijasi iš 7. Tuo pačiu iš 7 dalijasi ir skaičiai $3C+3B=3(C+B)$ bei $C+B$. Taigi $C+B=7$ arba 14. Kadangi $C=5,\ 7$ arba 9, tai $(C,B)=(5,2),\ (7,0),\ (5,9),\ (7,7)$ arba $(9,5)$. Kiekvienu iš šių atvejų $98A=199C+10B-1001$, tad randame atitinkamą A reikšmę: $A=\frac{1}{7},\ 4,\ \frac{6}{7},\ \frac{33}{7},\ \frac{60}{7}$. Taigi $C=7$, $B=0$ ir $A=4$. Gavome, kad skaičius $N=1407$ yra vienintelis keturženklis skaičius, kurio skaitmenis surašę atvirkščia tvarka, gausime skaičių $5N+6(=7041)$.

Trečias sprendimas. Lygtį $199C+10B=98A+1001$ gauname kaip ir pirmame sprendime. Kadangi $199=98\cdot 2+3$ ir $1001=98\cdot 10+21$, tai ją galima perrašyti taip:

$$98(2C-10-A)+3C+10B-21=0.$$

Matome, kad skaičius $3C+10B-21$ dalijasi iš 98. Kadangi $3C+10B-21\geqslant -21$ ir $3C+10B-21\leqslant 3\cdot 9+10\cdot 9-21=96$, tai $3C+10B-21=0$ (intervale $[-21;\,96]$ iš 98 dalijasi vienintelis skaičius 0). Taigi $3C+10B=21$, o skaičiaus $3C$ paskutinis skaitmuo yra 1. Todėl $C=7$. Šią reikšmę įrašę lygybėje $3C+10B=21$, gauname $B=0$. Galiausiai gauname, kad $98A+1001=199\cdot 7$ ir $A=4$. Taigi skaičius $N=1407$ yra vienintelis keturženklis skaičius, kurio skaitmenis surašę atvirkščia tvarka, gausime skaičių $5N+6(=7041)$.

Ats.: 1407.

5 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} ab+c+d=0,\\ bc+d+a=8,\\ cd+a+b=1,\\ da+b+c=7 \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius (a,b,c,d).

Pirmas sprendimas. Iš pirmosios lygties atėmę antrąją, o iš trečiosios atėmę ketvirtąją, atitinkamai gauname $b(a-c)+c-a=-8$ ir $d(c-a)+a-c=-6$. Tada

$$(a-c)(b-1)=-8 \quad \text{ir} \quad (a-c)(1-d)=-6.$$

Pastebėkime, kad $a\neq c$, $b\neq 1$ ir $d\neq 1$. Pirmąją iš gautųjų lygčių padaliję iš antrosios, gauname $\frac{b-1}{1-d}=\frac{4}{3}$. Dabar galime išreikšti $d=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}b$.

Iš duotosios sistemos antrosios lygties atėmę trečiąją, o iš pirmosios ketvirtąją, atitinkamai gauname $c(b-d)+d-b=7$ ir $a(b-d)+d-b=-7$. Pastebėkime, kad $d\neq b$. Gautąsias dvi lygtis sudedame ir jų sumą pertvarkome:

$$c(b-d)+a(b-d)+2(d-b)=0, \quad (b-d)(a+c-2)=0.$$

Kadangi $b \neq d$, tai $a + c = 2$. Išraiškas $d = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}b$ ir $c = 2 - a$ įrašome duotosios sistemos pirmojoje ir antrojoje lygtyse:

$$ab + (2 - a) + \frac{7}{4} - \frac{3}{4}b = 0,$$
$$b(2 - a) + a + \frac{7}{4} - \frac{3}{4}b = 8.$$

Sudedame gautąsias dvi lygtis:

$$2b + 2 + \frac{7}{2} - \frac{3}{2}b = 8.$$

Iš čia randame $b = 5$. Tada $d = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}b = -2$. Šias reikšmes įrašę lygtyje $ab + c + d = 0$, gauname $5a + c - 2 = 0$. Iš čia ir iš lygties $a + c = 2$ randame $a = 0$ ir $c = 2$.

Taigi įrodėme, kad jei (a, b, c, d) yra duotosios sistemos sprendinys, tai $a = 0$, $b = 5$, $c = 2$ ir $d = -2$. Patikrinę gauname, kad šis skaičių rinkinys iš tikrųjų yra duotosios sistemos sprendinys.

Antras sprendimas. Pirmąją lygtį sudėkime su antrąja, o trečiąją su ketvirtąja:

$$(a + c)b + (a + c) + 2d = 8, \qquad (a + c)d + (a + c) + 2b = 8.$$

Pastebėję dėsningumus gautosiose lygtyse, vieną iš jų atimkime iš kitos:

$$(a + c)(b - d) + (a + c - a - c) + 2(d - b) = 0, \qquad (a + c - 2)(b - d) = 0.$$

Taigi arba $b = d$, arba $a + c = 2$. Pirmuoju atveju

$$0 = ab + c + d = ab + c + b = da + b + c = 7,$$

todėl $a + c = 2$ ir

$$8 = (a + c)b + (a + c) + 2d = 2b + 2 + 2d, \qquad b + d = 3.$$

Sudėkime duotosios sistemos antrąją ir trečiąją lygtis:

$$9 = 8 + 1 = c(b + d) + 2a + (b + d) = 3c + 2a + 3 = 2(a + c) + 3 + c = 7 + c.$$

Taigi $c = 9 - 7 = 2$, $a = 2 - c = 0$. Dabar b ir d galime rasti, įrašę gautas a ir c reikšmes duotojoje sistemoje:

$$0 = ab + c + d = 2 + d, \qquad 8 = bc + d + a = 2b - 2.$$

Taigi $d = -2$, $b = 5$. Taip gautas sprendinys $(a, b, c, d) = (0, 5, 2, -2)$ tenkina ne tik pirmąsias dvi, bet ir kitas dvi duotosios sistemos lygtis.

Ats.: $(a, b, c, d) = (0, 5, 2, -2)$.