

Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Savivaldybių etapo užduotys 11–12 klasei
2022 m.

1 uždavinys. Šiandien Sonata ir Donata abi švenčia savo gimtadienius. Sonata Donatai pasakė tokį teisingą teiginį apie savo amžių: „Dabar man yra pusantro karto daugiau metų, nei tau buvo tuo metu, kai aš buvau tavo dabartinio amžiaus. O kai tu sulauksi mano amžiaus, mūsų amžių suma bus lygi dabartiniam mūsų kaimyno Renato amžiui.“ Kiekvienas amžius teiginyje yra sveikasis metų skaičius. Renatui šiuo metu 91 metai. Kiek metų šiandien sukako Sonatai?

2 uždavinys. Keturių svarelių – raudono, balto, mėlyno ir žalio – masės gramais atitinkamai lygios r , b , m ir z . Yra žinoma, kad šiuos keturis skaičius surašius didėjimo tvarka gaunama seka 1, 2, 3, 4 ir kad skaičius r lygus 2 arba 3. Nustatykite, ar turint tik šiuos svarelius ir lėkštines svarstyklės įmanoma trimis svėrimais garantuotai sužinoti visų keturių skaičių r , b , m , z reikšmes.

Pastaba. Kiekvienas svėrimas lėkštinėmis svarstyklėmis parodo, kurioje iš dviejų lėkščių padėta masė yra didesnė arba kad masės abiejose lėkštėse yra lygios.

3 uždavinys. Kiekviena $30 \times 30 \times 30$ kubo siena padalyta į 30×30 vienetinių langelių. Kai kurie kubo langeliai sudaro *eilutes*: kubo eilute vadinsime bet kurias 120 langelių, kurių vidurio taškai yra vienoje plokštumoje, lygiagrečioje su dviem priešingomis kubo sienomis. Šachmatų bokštas, priklijuotas kubo langelyje, *puola* kiekvieną langelį, esantį vienoje eilutėje su bokšto langeliu. Kiek daugiausiai bokštų galima priklijuoti skirtinguose kubo langeliuose, kad joks bokštas nepultų langelio, kuriame yra kitas bokštas?

4 uždavinys. Kvadrato $ABCD$ viduje pažymėtas toks taškas E , kad $\angle AEB = 90^\circ$ ir $3AE = 2BE$. Kvadrato kraštinėje CD pažymėtas toks taškas F , kad tiesė EF dalija kampą AEB pusiau. Raskite $CF : DF$.

5 uždavinys. Natūralųjį skaičių n vadinsime *kvadrakubu*, jei egzistuoja lygiai viena tokia natūraliųjų skaičių pora (a, b) , kad $n = a^2 \cdot b^3$. Natūralųjį skaičių n vadinsime *superkvadrakubu*, jei jis yra kvadrakubas ir lygiai pusė jo teigiamų daliklių yra kvadrakubai. Kiek teigiamų daliklių gali turėti superkvadrakubas? Raskite visus variantus.

Kiekvienas uždavinys vertinamas 5 taškais.