

70-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Organizuojama nuotoliniu būdu, 2022 04 19
11–12 klasės

1. Raskite mažiausią reikšmę, kurią įgyja

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2},$$

kai x, y, z yra trys realieji skaičiai, tenkinantys sąlygą $x + y + z = 1$.

2. Taškas O yra apie smailųjį trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras. Šio apskritimo liestinės, nubrėžtos per taškus A ir B , kertasi taške D . Tiesė, einanti per apskritimo centrą O ir kraštinės BC vidurio tašką, kerta kraštinę AC taške M . Įrodykite, kad tiesės BC ir DM yra lygiagrečios.
3. Ant stalo yra 7 krūvelės monetų, kuriose yra atitinkamai 1, 2, 3, 4, 5, 6 ir 7 monetos. Agnė gali vienu ėjimu įdėti dar po vieną monetą į bet kurias 5 krūveles. Ar gali Agnė atlikti keletą ėjimų taip, kad po jų visose krūvelėse monetų taptų po lygiai? Jei taip, nustatykite kiek mažiausiai ėjimų tam prireiks.
4. Raskite visus natūraliuosius n , kuriems egzistuoja tokie trys skirtingi teigiami racionalieji skaičiai a, b, c , kad skaičiai $a + b^2 + c^2$, $a^2 + b + c^2$ ir $a^2 + b^2 + c$ yra sveikieji, o skaičius $nabc$ nėra sveikasis.