

71-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Kaunas, 2023 04 21

11–12 klasės

1. Raskite visas funkcijas $f(x)$, apibrėžtas sveikųjų skaičių aibėje ir įgyjančias sveikąsias reikšmes, kurios tenkina lygybę

$$f(x + y) + f(xy) = f(x)f(y) + 1$$

su visais sveikaisiais x ir y .

2. Įrodykite, kad į šešiakampį $ABCDEF$, kuriame $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$ ir $\angle A = \angle C = \angle E$, galima įbrėžti apskritimą.
3. Netuščią natūraliųjų skaičių aibę vadinsime *puikia*, jei joje nėra tokių (nebūtinai skirtingų) skaičių a, b, c , su kuriais galiotų lygybė $a^b = c$. (Pavyzdžiui, aibė $\{2, 3\}$ yra puiki, o aibė $\{2, 3, 9\}$ nėra puiki, nes $3^2 = 9$.) Raskite didžiausią natūralųjį skaičių $n \geq 3$, su kuriuo aibė $\{2, 3, 4, \dots, n\}$ yra dviejų puikių aibių sąjunga.
4. Pasinaudojęs skaičiuotuvu, Linas nustatė, kad skaičiai 4^{52} ir 5^{52} prasideda skaitmeniu 2, o skaičiai 4^{11} ir 5^{11} prasideda skaitmeniu 4. Remdamasis savo skaičiavimais, jis tvirtina, kad jei su koku nors natūraliuoju n abu skaičiai 4^n ir 5^n prasideda skaitmeniu a , tai $a = 2$ arba $a = 4$. Ar Linas teisus?