

71-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Kaunas, 2023 04 21

9–10 klasės

1. Raskite visas funkcijas $f(x)$, apibrėžtas sveikųjų skaičių aibėje ir įgyjančias sveikąsias reikšmes, kurios tenkina lygybę

$$f(x + y) + f(xy) = f(x)f(y) + 1$$

su visais sveikaisiais x ir y .

2. Trikampio ABC kraštinėse BC ir AC pažymėti tokie taškai D ir E , kad AD yra trikampio pusiaukampinė, o $CD = CE$. Tiesė DE ir kampo ABC pusiaukampinė kertasi taške G . Įrodykite, kad $AG = DG$.
3. Seka, sudaryta iš raidžių A ir B , yra vadinama *paprasta*, jei joje iš eilės einančių raidžių A fragmentų ilgiai yra lyginiai, o iš eilės einančių raidžių B fragmentų ilgiai – nelyginiai. (Pavyzdžiui, sekos AA , BBB , $AAAABAA$ ir $AABBBAA$ yra paprastos, tačiau seka $BBAAB$ nėra paprasta.)

Kiek yra paprastų sekų, kurių ilgis lygus 15?

4. Raskite visas sveikųjų skaičių poras (a, b) , su kuriomis galioja lygybė

$$3a^2 + 3b^2 - 7a - 7b + 4 = 0.$$